université PARIS-SACLAY
IUT DE CACHAN

DUT GEii S3

Module PCS

Chapitre 1 : Asservissement des systèmes linéaires à temps continu

Fascicule de travaux dirigés

TD 1 : Introduction aux systèmes asservis

TD 2 : Stabilité des systèmes asservis

TD 3 : Correction des systèmes asservis

BONUS : Exercices corrigés

TD N°1 : Systèmes linéaires - Les outils

A propos :
Ce premier texte de travaux dirigés vous propose de prendre en main les outils mathématiques et techniques indispensables nécessaires à l'étude des systèmes asservis linéaires :

- Construction des diagrammes de Bode (Gain & Phase)
- Expression et calcul des modules & phases de fonction de transfert
- Transformée de Laplace & résolution d'équation différentielle
- Identification de processus physiques du 1er ou 2nd ordre
- Modélisation sous la forme de schéma bloc (Calcul de fonction de transfert en BO & BF)

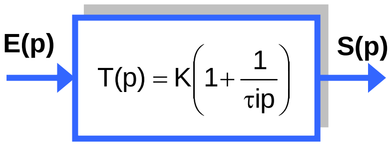
En fonction des exercices nous vous proposerons de vérifier vos résultats en effectuant des simulations avec le logiciel de Simulation LTSpice.

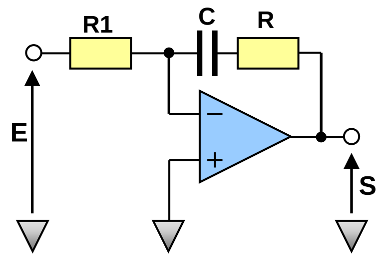
Exercice n°1 : Etude fréquentielle de fonctions de transfert de correcteur

Nous vous proposons d'étudier dans cet exercice les réponses fréquentielles (diagramme de Bode) de quelques fonctions de transfert de correcteur que nous aurons l'occasion de mettre en œuvre à l'occasion de l'étude des systèmes asservis. Contrairement aux préoccupations du module SEI au cours du semestre 2 précédent, le tracé de la phase prend ici une importance capitale car cette grandeur influe directement sur les performances du système. Par ailleurs on s'attachera à prévoir les tracés réels avec le plus de précisions possible.

A - Etude d'un correcteur PI

La fonction de transfert du correcteur PI (Proportionnel Intégral) est donné ci-contre et pour laquelle on propose une réalisation effective à base d'un amplificateur opérationnel que l'on suppose parfait et qui fonctionne en régime linéaire.





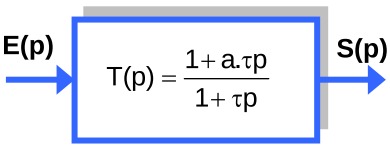
Q1 : Montrer simplement que le nom de ce correcteur correspond bien à la définition de la fonction de transfert.

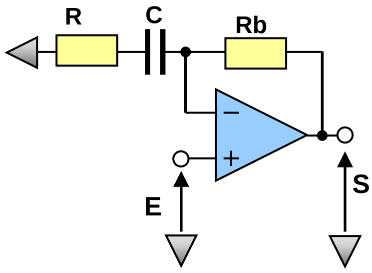
Q2 : Montrer que le montage à ampli-op réalise bien la fonction de transfert indiquée. Exprimer les variables K et τi en fonction des éléments du montage.

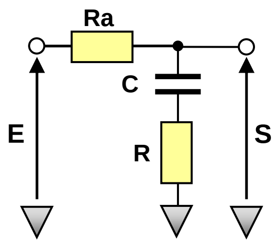
Q3 : On donne les valeurs suivantes R=10kΩ C=100nF et R1=1kΩ. Tracer le diagramme de Bode (gain+phase) asymptotique & réel de ce correcteur

B - Etude d'un correcteur de type avance ou retard de phase

On vous propose d'étudier un correcteur permettant d'apporter localement une avance ou un retard de phase en fonction du coefficient a.







Q1 : Montrer que les 2 montages proposés réalise le même type de fonction de transfert. Exprimer les variables a et τ en fonction des éléments pour chacun des montages. Quelle est la différence entre ces 2 structures ?

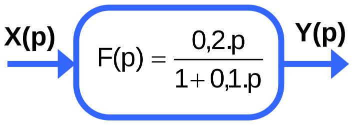
Q2 : Tracer l'allure du diagramme de Bode (gain + Phase) asymptotique et réel pour les cas a>1 & a<1.

Q3 : On désire que ce correcteur apporte une phase minimale de -45° pour la pulsation ωo=100rad/s. En déduire la valeur des grandeurs a & τ. Proposer une réalisation et vérifier éventuellement votre résultat en effectuant une simulation LTSpice.

Q4 : Même question mais l'on désire maintenant que le correcteur apporte une phase maximale de +60° pour la pulsation ωo=200rad/s.

Exercice n°2 : Réponse indicielle pour un processus physique

On considère un processus physique pour lequel la modélisation entre l'entrée de commande x(t) et la sortie de la grandeur physique y(t) conduit à la modélisation ci-contre. On applique sur l'entrée x(t) un échelon unitaire et l'on suppose qu'a l'instant t=0+ la sortie y(0+)=1.



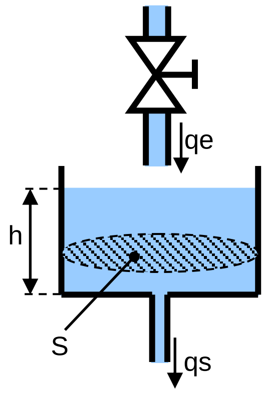
Q1 : Tracer le diagramme de Bode (Gain + Phase) de la fonction de transfert modélisant ce dispositif physique. Quelle est la nature de cette fonction de transfert ?

Q2 : En utilisant les tables de transformée de Laplace, exprimer l'évolution de la grandeur de sortie y(t) au cours du temps. Tracer l'allure de cette réponse.

Q3 : Proposer un équivalent électrique à ce modèle et vérifier vos résultats en utilisant le logiciel de simulation LTSpice.

Exercice n°3 : Modélisation d'un réservoir d'eau

On vous propose de modéliser le fonctionnement d'un réservoir d'eau dont on souhaite asservir la hauteur d'eau que l'on note h et qui peut évoluer au cours du temps. On considère que le réservoir cylindrique possède une section transversale $S=0,3m^2$. On considère qu'a t=0 le réservoir possède une hauteur h=2m.



On note qe le débit qui alimente le réservoir et on note Qs le débit sortant et dont on suppose que sa valeur est proportionnelle à la hauteur d'eau de telle sorte que qs=K.h avec $K=0,6.10^{-3}$ (SI). Les grandeurs qe, qs et h évoluent en fonction du temps et l'on considéra donc les notations qe(t), qs(t) et h(t) dans la suite de l'exercice..

Q1 : Que représente un débit ? Quelle est l'unité du coefficient K ?

Q2 : Si l'on considère une petite variation de volume d'eau dans le réservoir d'eau (que l'on note dV) dans un laps de temps très court (que l'on note dt) en déduire une équation différentielle simple entre dV/dt, qs(t) et qe(t).

Q3 : En utilisant la relation précédente montrer que le comportement du réservoir d'eau vis à vis de sa hauteur d'eau par rapport au débit d'entrée s'approche d'un système linéaire du 1er ordre dont vous exprimerez la fonction de transfert en p et dont vous préciserez la constante de temps τ.

Q4 : Pourrait-on considérer le système comme linéaire si le débit de sortie qs est tel que $qs = \alpha.\sqrt{h}$ (modèle plus proche des équations d'écoulement d'un fluide dans un réservoir) ?

Q5 : En conservant le modèle linéaire simplifié, représenter alors l'évolution de la hauteur d'eau lorsque le débit d'entrée qe passe de 0 à $5dm^3/s$ à l'instant t=0+.

Q6 : Proposer les éléments à mettre en place afin d'asservir le niveau d'eau dans le réservoir.

Exercice n°4 : Modèle d'un thermomètre à mercure

On utilise un thermomètre à mercure de démonstration (grand format) pour des travaux pratiques de physique. Celui ci indique une température initiale de 25°C et l'on plonge instantanément celui-ci dans un bain marie dont on régule la température à 45°C. Les élèves notent alors la progression de la température au cours du temps dans le tableau ci-dessous :

t (s)	0	6	12	18	24	30	36	42	54
T (°C)	25	35,5	40,5	42,9	44	44,5	44,8	44,9	45

Q1 : Représenter l'évolution de la température en fonction du temps et en déduire une fonction de transfert équivalente du thermomètre à mercure.

Q2 : Quel est le temps de réponse à 5% de ce thermomètre ?

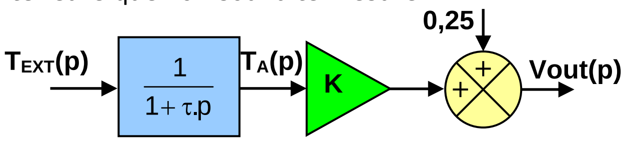
Q3 : On plonge cette fois-ci le thermomètre dans l'eau bouillante. Au bout de combien de temps indiquera t'il la température de l'eau à 1% prés ?

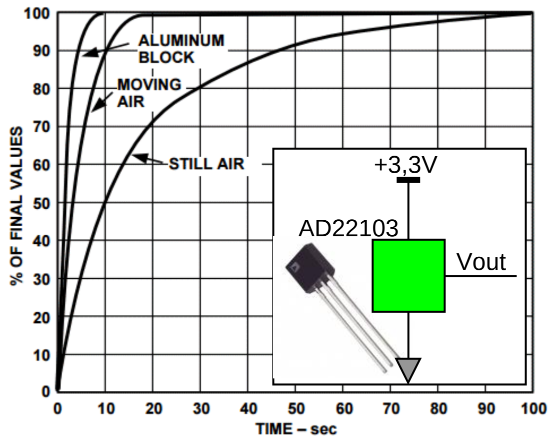
Exercice n°5 : Identification & modélisation d'un capteur de température

A travers cet exercice on vous propose de modéliser un capteur de température AD22103 dont le constructeur précise que sa tension de sortie est de la forme : $V_{out} = 0{,}25V + (28mV/°C) \times T_A$

Response of the AD22103 output to abrupt changes in ambient temperature can be modeled by a single time constant τ exponential function. Figure shows typical response time plots for a few media of interest.

T_A désigne la température de la surface sensible du capteur AD22103. Pour tenir compte du temps de réponse de ce capteur on propose la modélisation suivante dans laquelle T_{EXT} désigne la température extérieure que l'on souhaite mesurer :





Q1 : En utilisant l'extrait de la documentation constructeur proposé ci-contre, déterminer la constante de temps τ dans le cas "MOVING AIR". Expliquer votre mode opératoire compte tenu du modèle proposé (1er ordre)

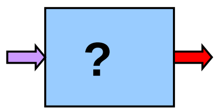
Q2 : Que désigne le terme "STILL AIR" et pour quelle raison la constante de temps est plus petite dans le cas "MOVING AIR" ?

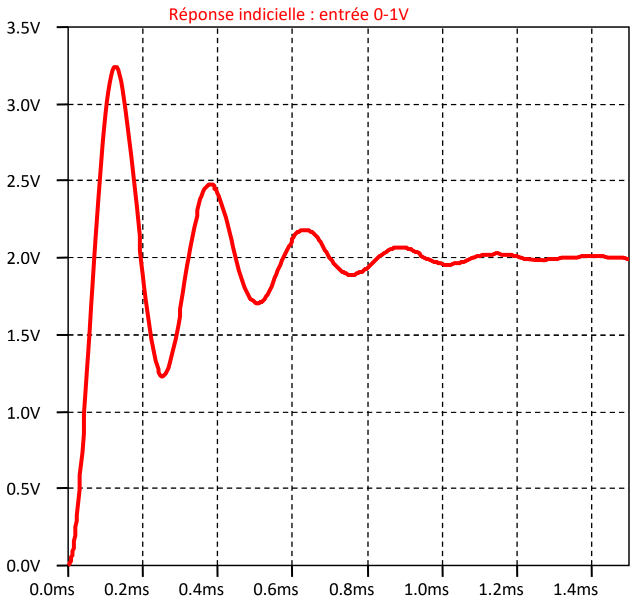
Q3 : Dans le modèle proposé quelle est la valeur de la constante K ? Si l'on se place en régime permanent quelle est la tension obtenue en sortie du capteur pour une température de 20°C

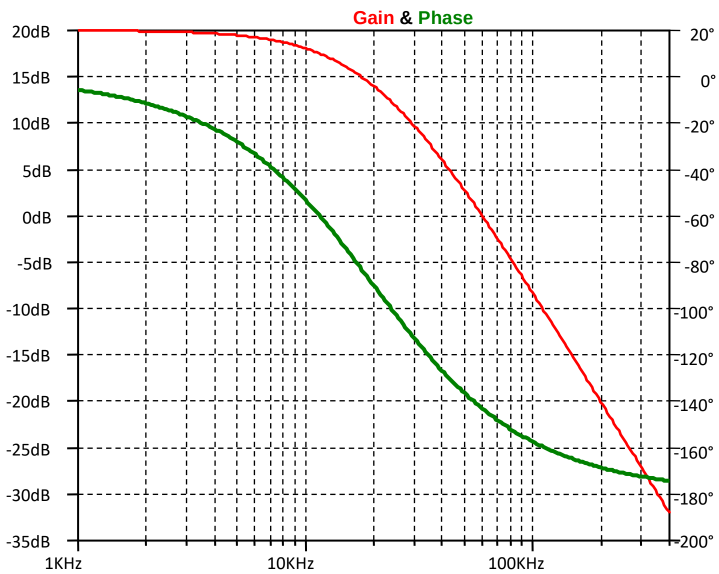
Q4 : On place le capteur de température en sortie d'un sèche cheveux et l'on suppose que la température T_{EXT} passe instantanément de 20°C à 65°C lorsque l'on actionne le sèche cheveux. Représenter l'évolution de la sortie Vout au cours du temps avec un minimum de précision.

Exercice n°5 : Identification d'un système du 2nd ordre

On vous propose de retrouver les paramètres caractéristiques de 2 système linéaire du 2[nd] ordre à partir des relevés fournis.
Filtre n°1 : Réponse indicielle avec une entrée variant entre 0 et 1V
Filtre n°2 : Réponse harmonique ou fréquentielle

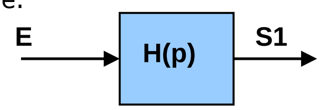


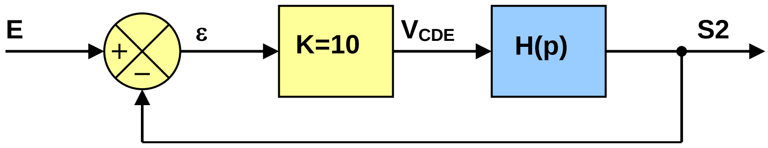




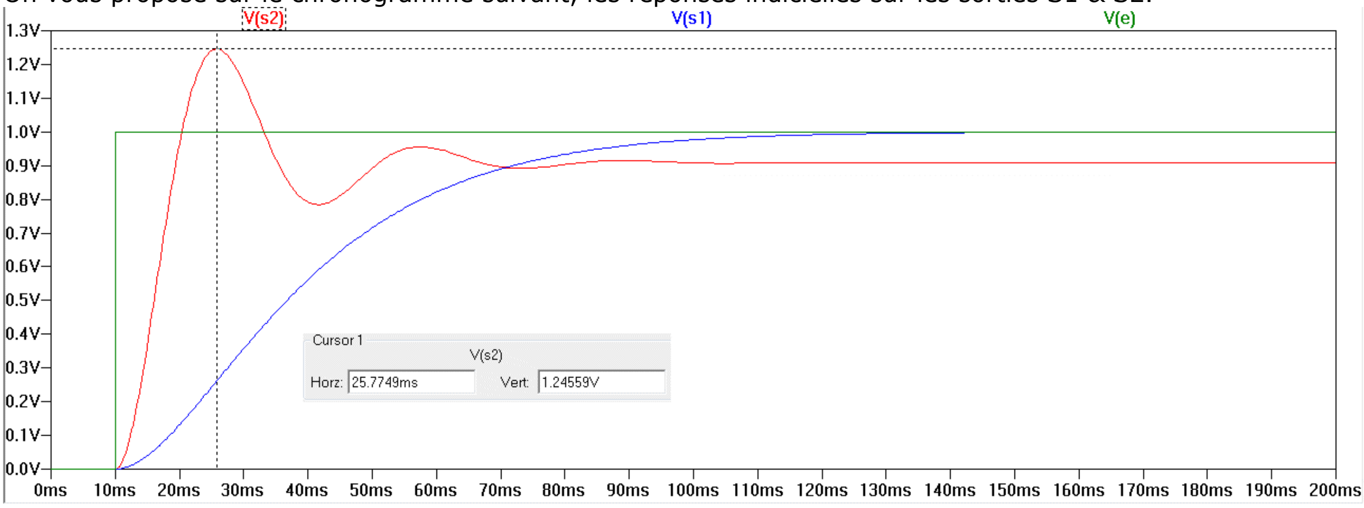
Exercice n°6 : Identification d'un processus physique

On souhaite retrouver les paramètres d'une fonction de transfert H(p) d'un processus physique à partir de 2 identifications effectuées dans un premier temps en boucle ouverte puis dans un second temps en boucle fermée.





On vous propose sur le chronogramme suivant, les réponses indicielles sur les sorties S1 & S2.



Q1 : Justifier simplement en observant la sortie S1 que le modèle H(p) est un modèle de type passe bas mais dont l'ordre est supérieur à 1.

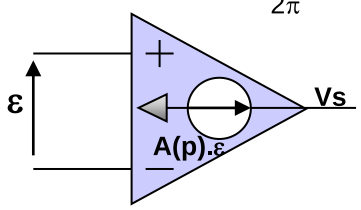
Q2 : Si l'on suppose que la fonction H(p) est un système linéaire passe bas du 2nd ordre (caractérisé par m & ωo) et dont le gain est de 0dB, montrer que la fonction de transfert en boucle fermé peut aussi se mettre sous la forme d'un second ordre caractérisé par un coefficient d'amortissement m1 et une pulsation propre $\omega o1$.

Q3 : A partir des informations données par le curseur, en déduire les valeurs de m1 et $\omega o1$ puis les valeurs de m & ωo.

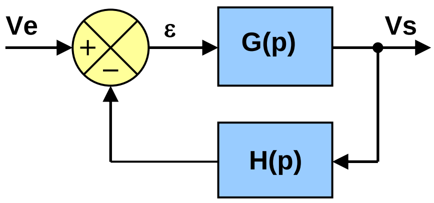
Q4 : Justifier simplement la valeur finale de la sortie S2.

Exercice n°7 : Montage amplificateur à AOP vue comme un système bouclé

On vous propose de reprendre l'étude d'un montage à ampli-op de type amplificateur non inverseur simple constitué de 2 résistances R1 & R2. On donne le modèle interne d'un ampli-op dans lequel on suppose que Ao>>1 et le produit $Ao.fo = \frac{Ao.\omega o}{2\pi}$ correspond au produit gain bande de l'ampli-op.



$$A(p) = \frac{Ao}{1+\frac{p}{\omega o}}$$



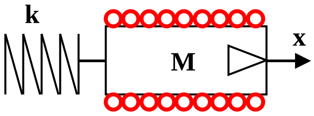
Q1 : Montrer que le montage amplificateur non inverseur peut se mettre sous la forme du schéma bloc proposé. Exprimer les fonctions de transfert H(p) et G(p) en fonction des éléments du montage R1, R2 et des paramètres caractéristiques de l'ampli-op Ao & ωo.

Q2 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermé et la mettre sous une forme canonique. Sous quelles conditions retrouve-t-on l'expression usuelle de l'amplification pour ce type de montage

Q3 : A partir de la forme de la fonction de transfert en boucle fermé justifier le terme produit gain bande.

Exercice n°8 : Positionnement d'une tête de lecture d'un disque dur

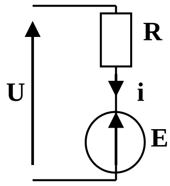
On s'intéresse dans le cadre de cet exercice au problème de positionnement d'une tête de lecture pour un disque dur. On souhaite fournir un modèle traduisant le déplacement de la tête en fonction de la tension appliquée au moteur. Le positionnement est assurée par un moteur linéaire constituée d'une bobine mobile guidée en translation par un circuit magnétique. La tête de lecture est entrainée par la bobine mobile et un ressort dont le coefficient de raideur k (k=55N/m) positionne la partie mobile en x=0. Afin de simplifier l'étude on néglige l'inductance de la bobine et le frottement visqueux. On donne par ailleurs les éléments suivants :



On note E la force contre électromotrice due au déplacement de la bobine. On considère que $E = \alpha \frac{dx}{dt}$ avec α=10 (SI) et x représente la position de la bobine.

On note Fa la force appliquée à la bobine qui est proportionnelle au courant qui la traverse. On fixe Fa=β.i avec β=4N/A.

La masse M de l'ensemble bobine et tête de lecture est estimée à 200g. Le modèle électrique simplifié de la bobine fait apparaitre une résistance R=12Ω.



Q1 : Ecrire une relation simple entre U, R, i et E.

Q2 : Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliquée au système en faisant intervenir les grandeurs Fa, M, x, k

Q3 : En appliquant la transformée de Laplace aux 2 équations précédentes et en effectuant les liaisons entre Fa et i d'une part puis E et x d'autre part en déduire une fonction de transfert entre la sortie x et l'entrée U.

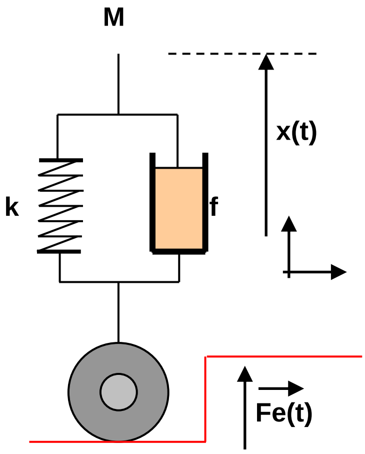
Q4 : Représenter l'évolution de la sortie x(t) lorsque l'on applique une tension d'entrée de 5V.

Exercice n°7 : Modélisation d'un amortisseur pour voiture

Dans le cadre du module PCS, il n'est pas forcément question d'électronique à chaque problème. Aussi nous vous proposons de modéliser ce système mécanique. On considère que la force Fe(t) est l'entrée du système et que x(t) est la sortie correspondant à la position du châssis mesurée par rapport à la position d'équilibre.

L'amortisseur est constitué d'un ressort dont le coefficient de raideur est k et d'un amortisseur visqueux dont le coefficient est f.

En isolant la masse M et en appliquant le principe fondamental de la dynamique (que vous rappellerez) on montre que : $Fe(t) - k.x(t) - f \cdot \frac{dx(t)}{dt} = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$



Q1: Comme x(t) représente la position du châssis, que représentent physiquement les grandeurs $\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$?

Q2 : Si l'on considère que x(t) admet comme transformée de Laplace X(p), exprimer les transformées de Laplace des grandeurs $\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ en fonction de X(p).

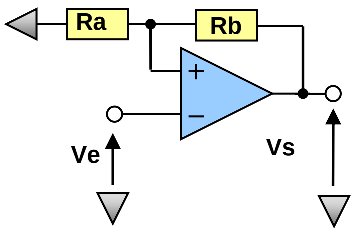
Q3 : Montrer alors que la fonction de transfert de ce système $T(p) = \frac{X(p)}{Fe(p)}$ peut se mettre sous la forme d'une fonction de transfert passe bas du 2nd ordre dont vous rappellerez la forme canonique et dont vous identifierez les paramètres caractéristiques ωo et m.

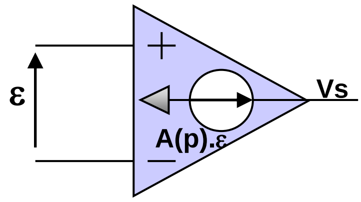
Q4 : Comment doit-on choisir le coefficient k pour obtenir une réponse indicielle sans pseudo oscillation ? Effectuer les applications numériques et précisez l'unité de k en sachant que M=1500kg et f=6.10^{4}kg/s

TD N°2 : Stabilité des systèmes asservis

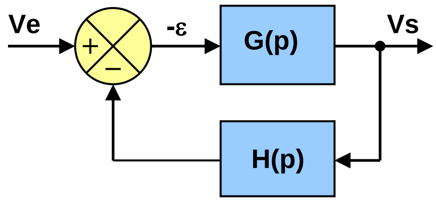
Exercice n°1 : Un pole à partie réelle positive ?

On vous propose de reprendre l'étude d'un montage à ampli-op avec une contre réaction positive telle qu'on la rencontre dans les montages de type comparateur de tension. En utilisant le modèle d'un amplificateur opérationnel standard, on vous propose de montrer que cela conduit à un système instable
On rappelle ci-dessous le modèle interne d'un ampli-op dans lequel on suppose que $Ao=10^5$ et le produit $Ao.fo = \frac{Ao.\omega o}{2\pi} = GBW$ correspond au produit gain bande de l'ampli-op. On donne GBW=1MHz.





$$A(p) = \frac{Ao}{1+\frac{p}{\omega o}}$$



Q1 : Montrer que le montage peut se mettre sous la forme du schéma bloc proposé. Exprimer les fonctions de transfert H(p) et G(p) en fonction des éléments du montage Ra, Rb et des paramètres caractéristiques de l'ampli-op Ao & ωo.

Q2 : On suppose que Ra=Rb. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et montrer qu'elle possède un pole réel positif. Que peut-on en déduire ?

Exercice n°2 : Application directe du critère de Routh

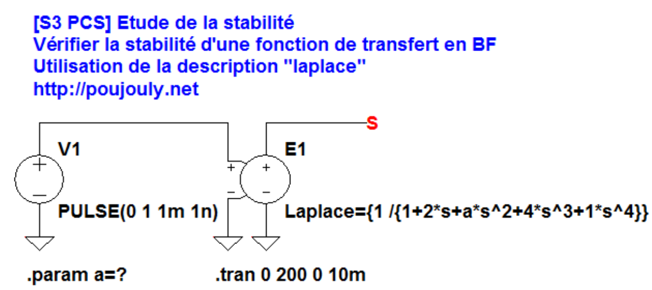
Q1 : On considère les fonctions de transferts en boucle fermée suivantes :

$$T1(p) = \frac{1}{1+6p+3p^2+5p^3+p^4} \quad \text{et} \quad T2(p) = \frac{2}{1+16p+3p^2+5p^3+p^4}$$

Déterminer la stabilité pour ces 2 fonctions de transferts en appliquant le critère de Routh.

Q2 : On considère la fonction de transfert en boucle fermée telle que $T(p) = \frac{1}{1+2p+a.p^2+4p^3+p^4}$. En appliquant le critère de Routh, déterminer la valeur limite de a qui rend le système stable.

Afin de vérifier votre résultat on vous propose d'utiliser la simulation LTSpice suivante dans laquelle on décrit la fonction de transfert directement sous la forme de Laplace (La variable s correspond à la variable p). Compte tenu des techniques d'intégration du logiciel de simulation LTSpice nous vous proposons de prendre des valeurs de a pas trop proche de la valeur limite afin d'obtenir un résultat de simulation exploitable.

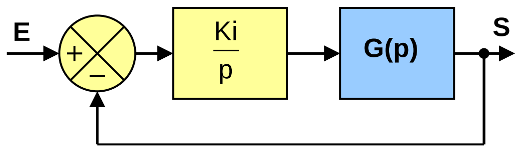


http://poujouly.net rubrique [S3] Module PCS S3PCS_TD2_exo1.asc

Exercice n°3 : Stabilité d'un système bouclé

On considère le système bouclé suivant dans lequel on donne

$$G(p) = \frac{100}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$ avec τ_1=2s et τ_2=10s

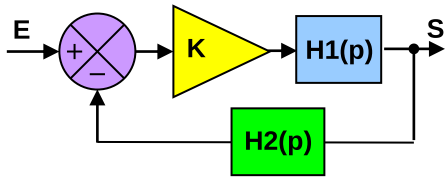


Q1 : Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée

Q2 : Etudier la stabilité en fonction de Ki par le critère de Routh.

Exercice n°3 : Discussion autour d'un diagramme de Bode en Boucle ouverte

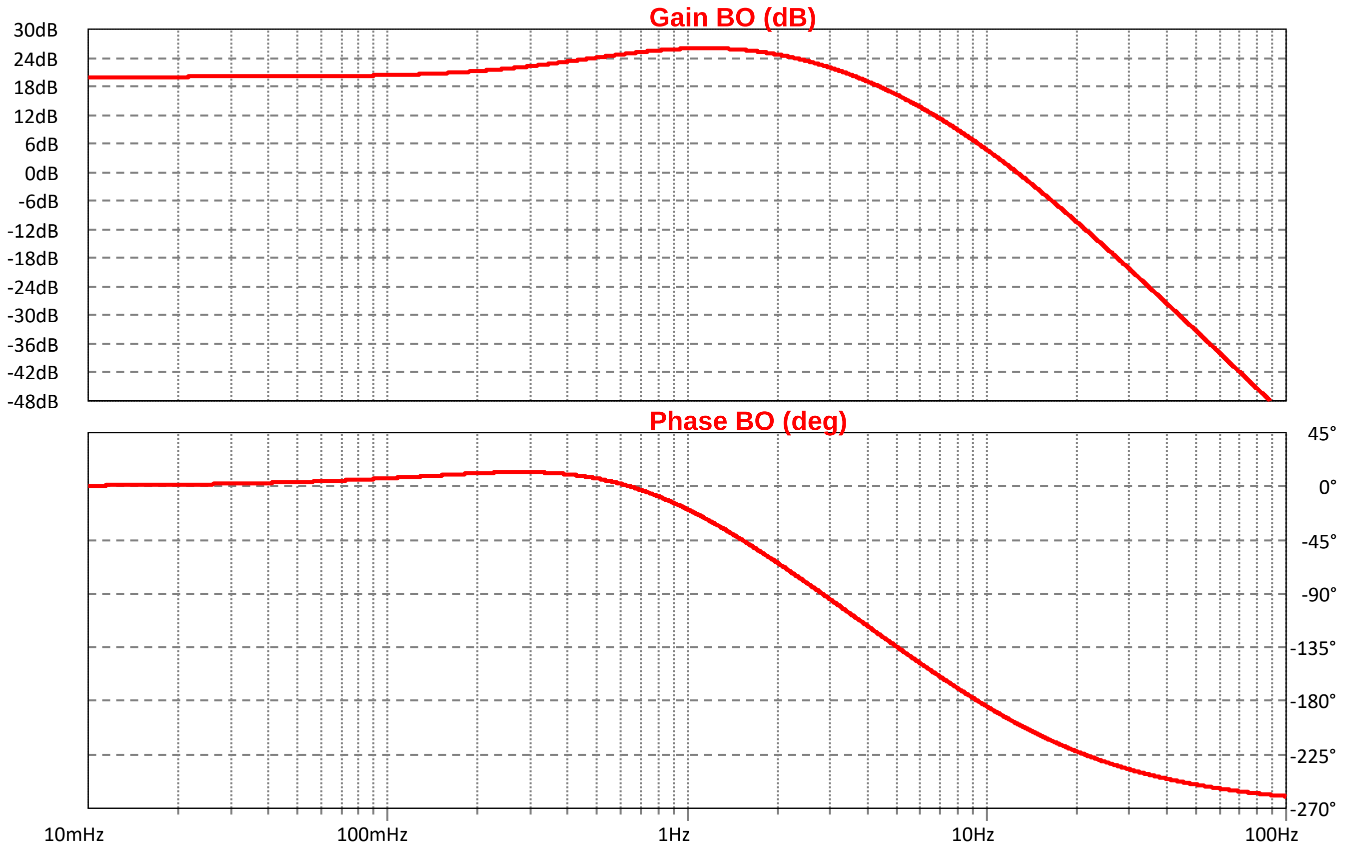
On considère le système bouclé suivant pour lequel on représente ci-dessous le diagramme de Bode en boucle ouverte pour une amplification K=10.



Q1 : Pour la valeur K=10, quelle est la stabilité du système ? Justifier votre réponse en indiquant graphiquement votre démarche.

Q2 : En appliquant graphiquement le critère du revers déterminer la valeur limite de K qui rend le système stable ou instable.

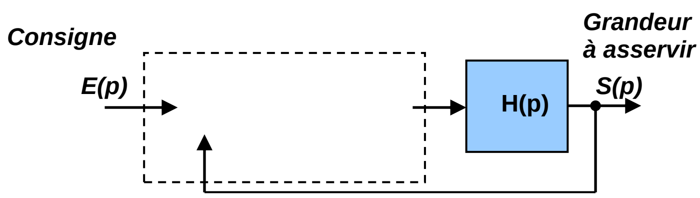
Q3 : Déterminer graphiquement la valeur de l'amplification K qui permet d'obtenir une marge de phase de 45°. Indiquer sur le tracé fourni la marge de phase.



Exercice n°4 : Une histoire de stabilité et d'un tracé de diagramme de Bode

On considère un processus physique à asservir dont on donne la fonction de transfert H(p) tel que :

$$H(p) = \frac{1}{\frac{p}{\omega_1} \cdot \left(1 + \frac{p}{\omega_1}\right)^2} \quad \text{avec } \omega_1 = 10\text{rad/s}$$



Q1 : Ce processus est inséré dans un système asservi composé d'un retour unitaire et d'un correcteur proportionnel dont le gain (linéaire) est K. Représenter le schéma bloc de ce système asservi en complétant le schéma de la figure proposée. Indiquer ou se trouve le signal erreur $\varepsilon(p)$

Q2 : Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p).

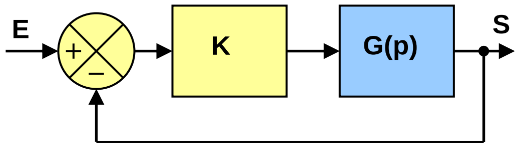
Q3 : Tracer le diagramme de Bode de la FTBO (asymptotique & réel) pour K=1 sur le document réponse en indiquant les points et pentes caractéristiques de ce tracé. Que peut-on dire de la stabilité de ce système ? Si l'on choisit K=10, que peut-on dire de la stabilité de ce système ?

Q4 : Exprimer l'argument de la FTBO et rechercher la pulsation ω_T telle que $\text{Arg(FTBO)} = -\frac{3\pi}{4}$. Calculer alors la valeur de K telle que $|\text{FTBO}| = 1$. Dans ces conditions quelle est la marge de phase du système ?

Exercice n°5 : Marge de stabilité

On considère le système bouclé suivant dans lequel on donne

$$G(p) = \frac{1}{(1+p)^2\left(1+\frac{p}{10}\right)}$$



Le bloc K est un correcteur proportionnel.

Q1 : En appliquant le critère du revers déterminer le gain K qui rend le système instable.

Q2 : Déterminer le gain K qui permet d'obtenir une marge de phase de 45°.

Q3 : Déterminer le gain K qui permet d'obtenir une marge de gain de 6dB.

Q4 : Vérifier vos résultats en effectuant une simulation LTSpice.

Exercice n°6 : Un oscillateur vue comme un système bouclé instable

Le montage d'étude est représenté sur la figure 1 ci-contre. On considère dans toute cette partie que les amplificateurs opérationnels sont parfaits et fonctionnent en régime linéaire.

Q1 : Exprimer S1(p) en fonction de S5(p), Ra et Rb.

Q2 : Exprimer S2(p) en fonction de S1(p), R, C et la variable de Laplace p.

Q3 : Exprimer S5(p) en fonction de S2(p), R, C et la variable de Laplace p.

Q4 : Montrer alors que le schéma électrique peut se mettre sous la forme du schéma bloc représenté sur la figure 2. Exprimer G(p) en fonction de Ra et Rb et H(p) en fonction de R, C et p.

Q5 : Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte T_{BO} et tracer l'allure du diagramme de Bode (Gain + Phase) asymptotique et réel en faisant apparaître les quantités Ra, Rb et 1/RC.

Q6 : Déterminer la valeur de G pour que le montage soit juste oscillant, déterminer alors la fréquence des oscillations fosc.

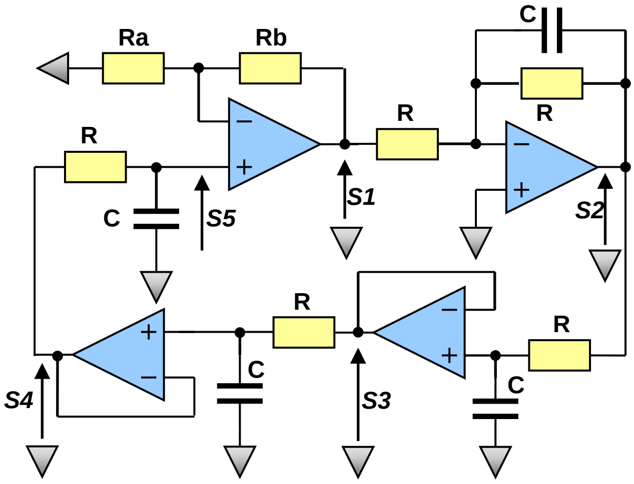


Figure 1 : Schéma de l'oscillateur

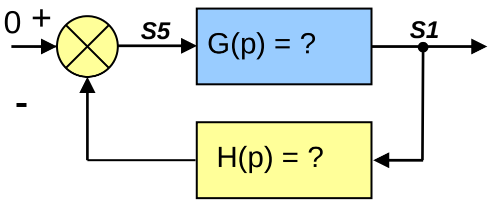


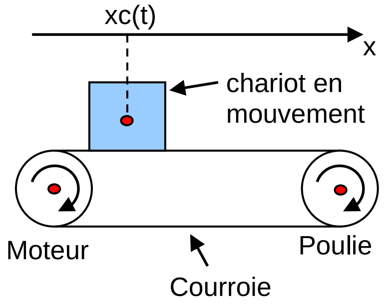
Figure 2 : Schéma bloc

TD N°3 : Correction des systèmes asservis

Exercice n°1 : Un asservissement de position

Pour cet exercice on s'intéresse à l'asservissement en position d'un chariot sur un tapis entrainé en mouvement par un moteur à courant continu comme schématisé ci-contre.

On considère que la fonction de transfert qui relie la tension de commande du moteur u(t) à la vitesse linéaire du chariot vc(t) peut être modélisé sous la forme suivante : $\frac{Vc(p)}{U(p)} = \frac{KM}{1+\tau m.p}$ dans laquelle τm=0,6s désigne la constante de temps mécanique et KM = 0,2 (SI)

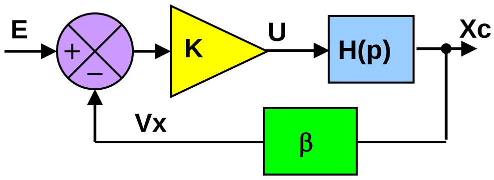


Q1 : Quelle est l'unité du coefficient KM ?

Q2 : On désigne par xc(t) la position du chariot à l'instant t. Quelle est la relation entre vc(t) et xc(t) ? En déduire la fonction de transfert H(p) reliant U(p) à Xc(p).

Comme on désire effectuer un asservissement de position, on utilise un potentiomètre relié à la poulie permettant de connaitre la position du chariot. On récupère une tension image de la position de telle sorte que Vx=β.Xc avec β=2,5 (SI).

On effectue une correction proportionnelle avec un amplificateur K.



Q3 : Quelle est l'unité du coefficient β ?

Q4 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p) = \frac{Xc(p)}{E(p)}$ du système asservi et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'une fonction de transfert passe bas du 2nd ordre dont vous préciserez l'expression du coefficient d'amortissement m , de la pulsation propre ωo et de l'amplification statique A.

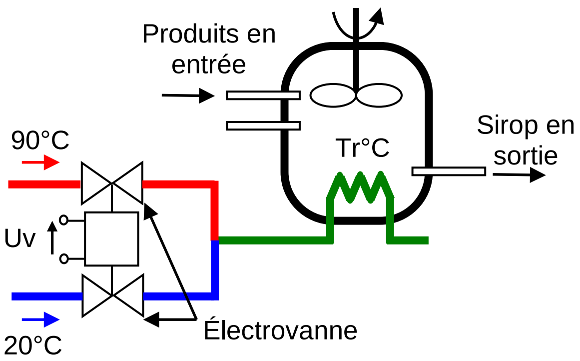
Q5 : Afin d'obtenir un temps d'établissement à 5% minimal, on fixe $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire la valeur du correcteur proportionnel K.

Q6 : Tracer l'évolution de la position xc(t) si l'on applique en entrée un échelon de tension compris entre 0 et 2V en précisant la valeur du premier dépassement et l'instant pour lequel à lieu de dépassement. On suppose qu'a l'origine on se situe à la position xc=0.

Exercice n°2 : Correction proportionnelle pour la confection d'un sirop

Pour cet exercice on s'intéresse à la régulation de température d'un réacteur de cuisson utilisé pour la confection d'un sirop. Les données du problème correspondent au réacteur instrumenté de la marque P de Galle produisant le célèbre "beau sirop, sirop gagnant" dont la mise en température nécessite un temps de réaction rapide au moment de l'injection des produits.

La régulation en température est assurée par une commande simultanée de 2 électrovannes permettant de chauffer ou refroidir le mélange à partir de 2 sources thermiques à 90°C et 20°C.

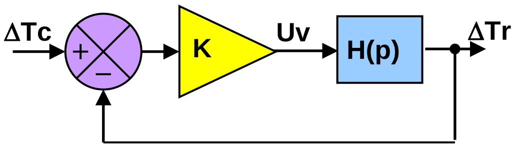


Afin de mettre en place l'asservissement on effectue un essai en boucle ouverte du système dans lequel on note la variation de température du réacteur ΔTr par rapport à la commande en tension des 2 électrovannes. On obtient le relevé proposé sur la figure se trouvant sur le document réponse lorsque la tension de commande Uv passe de 0 à 1V.

Q1 : On propose de modéliser la fonction de transfert du dispositif en boucle ouverte sous la forme ci-contre et pour laquelle on donne m=1,8 et fo=1Hz. Justifier que la réponse indicielle proposée n'est pas celle d'une fonction de transfert du 1er ordre. Quelle est la valeur du paramètre K_T ainsi que son unité ?

$$H(p) = \frac{\Delta Tr(p)}{Uv(p)} = \frac{K_T}{1 + 2m\frac{p}{\omega o} + \left(\frac{p}{\omega o}\right)^2}$$

Afin d'accélérer la mise en température du réacteur de cuisson, on utilise un correcteur proportionnel dont on fixe la valeur K=1.2. On note ΔTc la consigne concernant les variations de température que l'on souhaite obtenir dans le réacteur.



Q2 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p) = \frac{\Delta Tr(p)}{\Delta Tc(p)}$ du système asservi et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'une fonction de transfert passe bas du 2nd ordre dont vous préciserez l'expression du coefficient d'amortissement m_1 , de la pulsation propre ωo_1 et de l'amplification statique α.

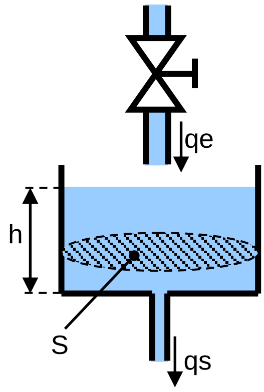
Q3 : Calculer les valeurs des grandeurs m_1, fo_1 et α. Compte tenu de la valeur de m_1 que peut-on dire de la réponse indicielle ?

Q4 : Tracer avec un minimum de précision, la réponse de la fonction de transfert en boucle fermée sur le document réponse pour un échelon de température correspondant à une variation ΔTc de 0 à 10°C. Vous superposerez votre tracé avec le tracé proposé en boucle ouverte.

Q5 : Que peut-on conclure sur le choix de ce correcteur ?

Exercice n°3 : Un intégrateur pur pour le niveau d'un réservoir

On vous proposer d'étudier un dispositif permettant d'asservir le niveau d'un réservoir. On considère que le réservoir cylindrique possède une section transversale $S=1m^2$. On considère qu'a t=0 le réservoir est vide.



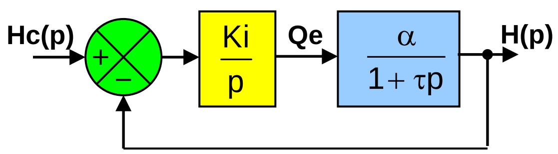
On note qe le débit qui alimente le réservoir et on note qs le débit sortant et dont on suppose que sa valeur est proportionnelle à la hauteur d'eau de telle sorte que qs=K.h avec $K=1.10^{-3}$ (SI). Les grandeurs qe, qs et h évoluent en fonction du temps et l'on considéra donc les notations qe(t), qs(t) et h(t) dans la suite de l'exercice..

Q1 : Quelle est l'unité du coefficient K ?

Q2 : Si l'on considère une petite variation de volume d'eau dans le réservoir d'eau (que l'on note dV) dans un laps de temps très court (que l'on note dt) en déduire une équation différentielle simple entre dV/dt, qs(t) et qe(t).

Q3 : En utilisant la relation précédente montrer que le comportement du réservoir d'eau vis à vis de sa hauteur d'eau par rapport au débit d'entrée s'approche d'un système linéaire du 1er ordre de la forme $\frac{H(p)}{Qe(p)} = \frac{\alpha}{1+\tau p}$

Afin de remplir le réservoir d'eau à un niveau précis, on utilise une correction intégrale en agissant sur le débit d'entrée. On met alors en place l'asservissement représenté ci-contre dans lequel Hc désigne la consigne sur la hauteur d'eau.



Q4 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p) = \frac{H(p)}{Hc(p)}$ du système asservi et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'une fonction de transfert passe bas du 2nd ordre dont vous préciserez l'expression du coefficient d'amortissement m , de la pulsation propre ωo. Déterminer la valeur de Ki afin d'obtenir une réponse indicielle sans dépassement.

Q5 : Avec ce type de correction, existe-t-il une erreur de position ? Justifier simplement votre réponse.

Q6 : Quel dispositif proposeriez vous pour mesurer la hauteur d'eau du réservoir ?

Problème n°1 : Asservissement en température d'un générateur étalon

Contexte de l'étude

On désire asservir avec précision la température d'un générateur étalon utilisé pour l'étalonnage d'appareils de mesures de précisions. Afin de garantir une excellente précision pour les oscillateurs à quartz il est indispensable de maitriser la température de fonctionnement. Pour cela on utilise une cellule à effet Peltier qui permet de chauffer ou de refroidir l'une des faces mis en contact avec l'oscillateur en fonction du sens d'alimentation de la cellule. Afin de moduler la puissance fournie à la cellule à effet Peltier, on utilise une commande en modulation de largeur d'impulsion que l'on présente à la fin de ce problème.

Photo : Cellule à effet Peltier

Identification du processus physique

Afin de modéliser le processus physique à asservir on effectue une réponse indicielle. On désigne par $V\alpha$ la tension de commande de la cellule à effet Peltier et par ΔTs l'écart de température que l'on souhaite contrôler par rapport à la température ambiante.

On propose le modèle suivant tel que :

$$G(p) = \frac{\Delta Ts}{V\alpha} = \frac{\beta}{1+\tau p}$$

avec τ=2sec et β=0,8°C/V

Q1 : Justifier à partir de l'essai effectué le modèle proposé.

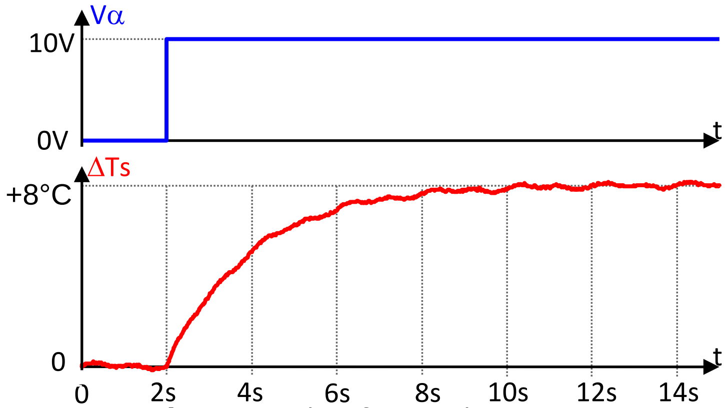


Figure 1 : Identification du processus

Mise en œuvre d'un premier correcteur proportionnel

Afin d'améliorer la rapidité du système et contrôler le dispositif on propose d'effectuer une correction proportionnelle en choisissant C(p)=K>0

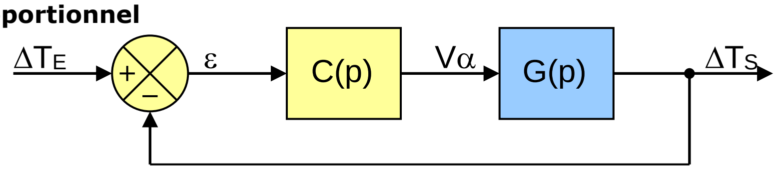


Figure 2 : Schéma bloc

Q2 : Exprimer la fonction de transfert en boucle fermé et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$FTBF(p) = \frac{\Delta Ts}{\Delta Te} = \frac{\beta_1}{1+\tau_1 p}$$

Q3 : On fixe K=5V/°C. En analysant le schéma bloc, justifier l'unité de ce correcteur proportionnel.

Q4 : Tracer la réponse indicielle pour un échelon ΔTe=5°C en calculant la nouvelle constante de temps τ_1. Indiquer la valeur finale ΔTs et en déduire l'erreur de température. Que peut-on dire de ce correcteur ?

Mise en œuvre d'un correcteur proportionnel intégral

On place un correcteur proportionnel intégral C(p) afin d'améliorer de manière significative les performances de la boucle fermée. On donne $C(p) = K_I \cdot \left(1+\frac{1}{\tau i.p}\right)$

Q5 : On règle le correcteur proportionnel de telle sorte à compenser le pole dominant. Ainsi on choisit $\tau i=\tau$. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermé et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$FTBF(p) = \frac{\Delta Ts}{\Delta Te} = \frac{1}{1+\tau_2 p}$$

Q6 : Calculer la valeur de K_I afin d'obtenir une constante de temps τ_2 cinq fois plus petite que la constante τ du processus en boucle ouverte.

Q7 : Tracer la réponse indicielle pour un échelon ΔTe=5°C et commenter le résultat obtenu.

A propos de la commande du module à effet Peltier

On effectue la commande en utilisant un hacheur 4 quadrants comme le montre la figure suivante.

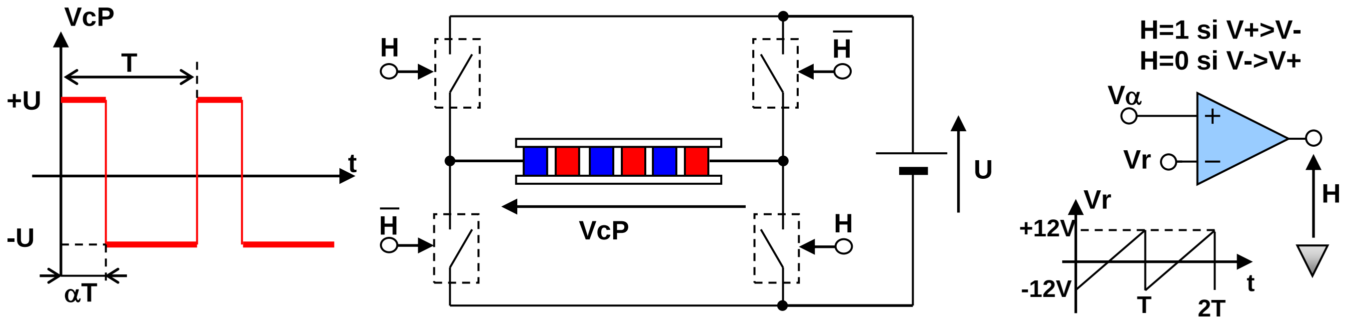


Figure 3 : Dispositif de commande du module à effet Peltier

Q8 : Exprimer la valeur moyenne de la tension de commande <VcP> du module Peltier en fonction de U & α.

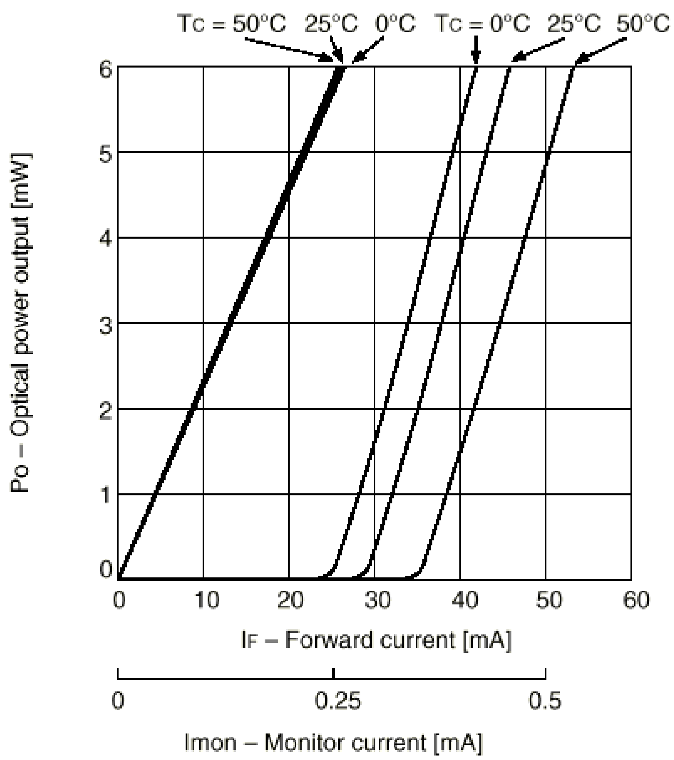
Q9 : On donne U=12V. Si l'on souhaite obtenir <VcP>=10V en déduire la tension Vα qu'il convient d'appliquer sur l'entrée du comparateur. Représenter en concordance de temps les signaux Vα, Vr, H, /H et VcP pour illustrer le fonctionnement de ce dispositif.

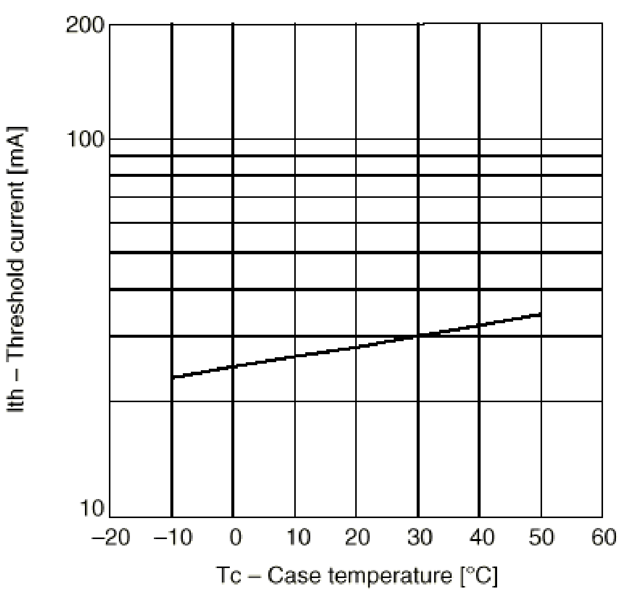
Problème n°2 : Conception d'un asservissement en puissance d'une diode LASER

On désire concevoir un système de régulation de puissance pour une diode LASER (DL) utilisée dans un télémètre. Dans un premier temps on vous propose de rechercher un modèle de fonctionnement de la DL, puis nous étudierons la réalisation d'un asservissement avec un correcteur intégral.
Nous allons baser notre étude sur la D.L SLD1131VS de Sony dont vous trouverez l'intégralité de la documentation constructeur sur le site http://poujouly.net. Il existe 3 caractéristiques essentielles dont on doit tenir compte lors de l'utilisation de la D.L

- Puissance optique P_O en fonction du courant direct I_F
- Courant inverse de la photodiode I_{mon} (Monitor Current) en fonction de la puissance optique
- Le courant de seuil I_{th} (Threshold Current) en fonction de la température du boîtier T_C

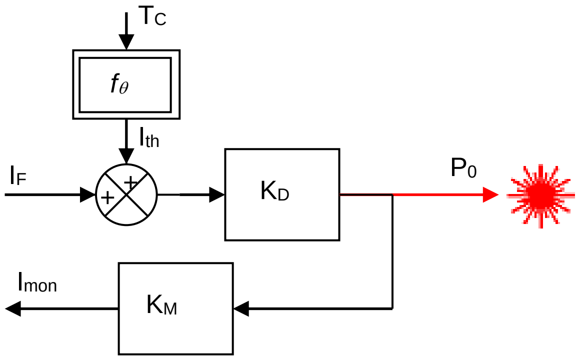
Les caractéristiques suivantes sont extraites de la documentation constructeur :





NB : il existe une caractéristique supplémentaire qui permet de constater que les variations du courant I_{mon} sont quasi-indépendante des variations de la température T_C.

L'analyse des courbes précédentes permet donc de donner le modèle suivant :



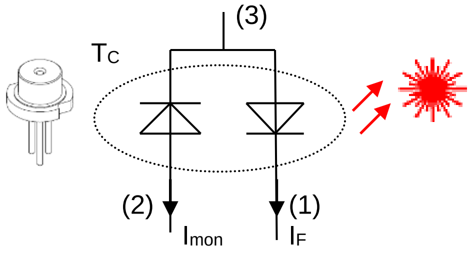


Figure 1 : Modèle de la diode

Figure 2 : schéma électrique

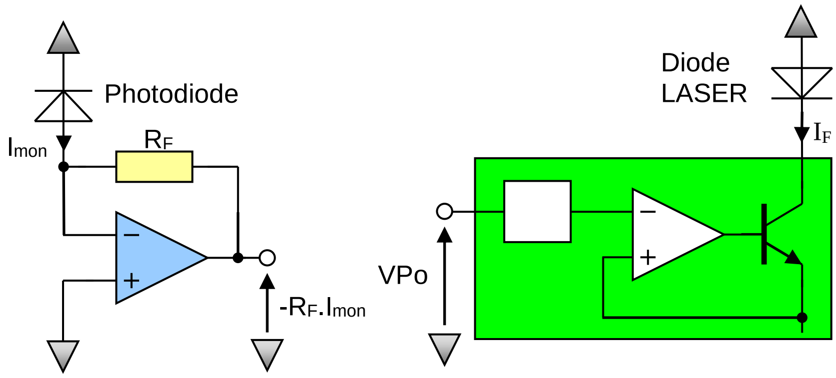
Q1 : Justifier le modèle proposé et déterminer les valeurs des coefficients K_D et K_M Quelle est la forme de la fonction non linéaire $f\theta$?

Q2 : Pour quelle raison doit-on mettre en œuvre un asservissement de puissance ?

Pour effectuer la mesure de la puissance, on mesure le courant inverse de la photodiode intégrée à la DL.

Pour régler la puissance de la DL, on contrôle le courant I_F dans lequel on précise que I_F=gm.VPo
avec gm = 10mA/V

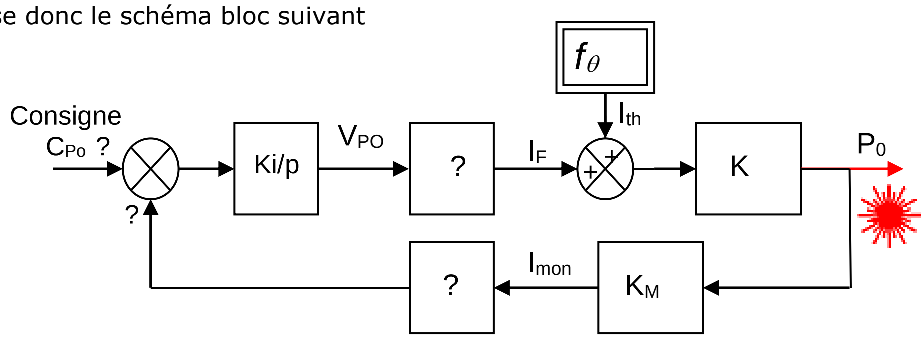
Q3 : Proposer une valeur pour la résistance R_F = 22,220kΩ afin d'obtenir l'image en Volt de la puissance Optique (-1V pour 1mW).



Afin de corriger les dérives dues à la température, on opte pour un correcteur intégral qui permet d'annuler toute d'erreur de position. On propose donc le schéma bloc suivant

Q4 : Justifier et compléter le schéma bloc représenté ci-contre (?).

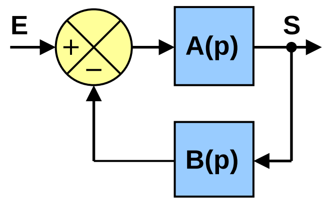
Q5 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermé de ce système en oubliant volontairement l'entrée de perturbation et en déduire l'expression de la constante du temps τ de ce système.



Q6 : Proposer une valeur de Ki pour obtenir une constante du système en BF τ = 100 ms

Q7 : Proposer un schéma de montage pour la réalisation du comparateur et du correcteur intégral. Proposer une simulation LTSpice de ce dispositif.

Exercice n°1 : Tracé de diagramme de Bode d'une fonction de transfert en BO



La modélisation classique d'un système asservi aboutit généralement au schéma bloc représenté ci-contre. On définit alors une fonction de transfert en boucle ouverte $T_{BO}(p)=A(p).B(p)$ qui nous permet d'étudier en autre la stabilité du système asservi.

Q1 : A quoi correspond la fonction de transfert en boucle fermée et quelle est son expression en fonction de A(p) et B(p) ?

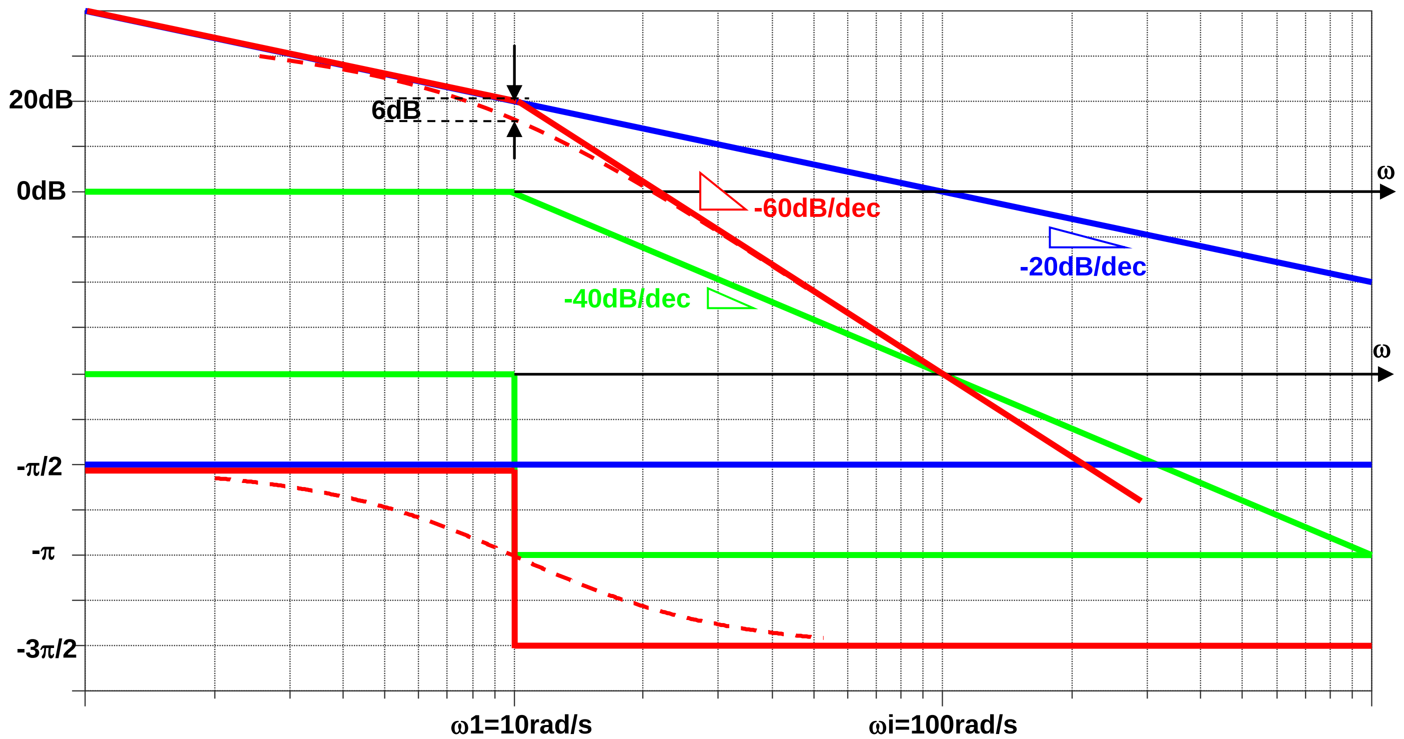
Q2 : On précise les fonctions suivantes $A(p)=\frac{1}{(1+\tau_1\cdot p)^2}$ et $B(p)=\frac{1}{\tau i.p}$ avec τ_1=100ms et τi=10ms. Tracer le diagramme de Bode asymptotique (Gain + Phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte $T_{BO}(p)$ en utilisant le document réponse. Superposer sur le tracé asymptotique l'allure du diagramme de Bode réel en indiquant les points caractéristiques. Vous effectuerez les tracés en fonction de la pulsation ω.

Q3 : Pour quelle valeur de pulsation l'argument de T_{BO} passe-t-il par $-\pi$? En déduire le gain de T_{BO} pour cette pulsation.

Q1 : La fonction de transfert en boucle fermée correspond à la fonction de transfert qui relie la sortie S à l'entrée E. $FTBF(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{A(p)}{1+A(p).B(p)}$

Q2 : On peut écrire que $FTBO(p)=A(p)\cdot B(p)=\frac{1}{(1+\tau_1\cdot p)^2}\cdot\frac{1}{\tau i\cdot p}$ que l'on peut mettre sous la forme

$$\boxed{FTBO(p)}=\boxed{\frac{1}{\left(1+\frac{p}{\omega_1}\right)^2}}\cdot\boxed{\frac{\omega i}{p}}$$ avec $\omega i=\frac{1}{\tau i}=100rad/s$ et $\omega_1=\frac{1}{\tau_1}=10rad/s$

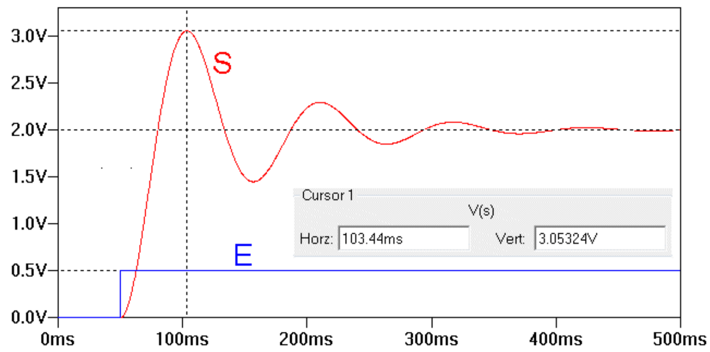


Q3 : L'argument de T_{BO} passe par $-\pi$ pour $\omega_1 = \dfrac{1}{\tau_1} = 10\,rad/s$.

Pour $\omega = \omega_1$ le gain de A(p) est de -6dB (2 fois -3dB puisqu'il s'agit de la pulsation de coupure) mais le gain de B(p) est de +20dB donc on en déduit le gain de T_{BO} = +14dB

Exercice n°2 : Identification pour un système linéaire du 2nd ordre

On vous propose de retrouver les paramètres caractéristiques d'un système linéaire du 2nd ordre à partir d'un relevé représenté ci-contre dans lequel E désigne l'entrée et S la sortie.



Q1 : Quel est le nom classiquement utilisé pour décrire ce type de réponse temporelle ?

On rappelle que pour ce type de réponse le premier dépassement est donné par la relation :

$$D\% = 100.\exp\left(\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right) \quad \text{pour} \quad tpic = \frac{Tp}{2} = \frac{\pi}{\omega o \cdot \sqrt{1-m^2}}$$

Q2 : En régime permanent quelle est l'amplification du système linéaire ? Pour quelle raison simple ce système linéaire correspond-il à un filtre passe bas ?

Q3 : A partir des informations proposées sur le relevé, indiquer les valeurs de D% et tpic.

Q4 : Retrouver les paramètres caractéristiques m & ωo du système en détaillant votre démarche.

Q1 : Il s'agit d'une réponse indicielle.

Q2 : En régime permanent l'amplification du système linéaire est de 2V/0,5V soit 4.
Il s'agit d'un filtre passe bas car en régime permanent la tension continue d'entrée se retrouve en sortie.

Q3 : Comme 100% correspond à 2V alors le dépassement de 3,05324V-2V correspond à D%=52,662%

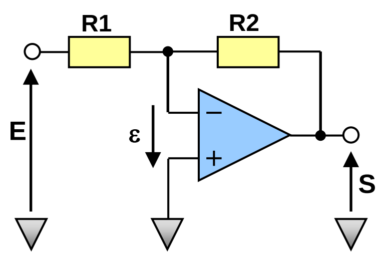
tpic=103,44ms-50ms=53,4ms

Q4 : Comme $D\% = 100.\exp\left(\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right)$ alors $\ln\left(\frac{100}{D\%}\right) = \frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}$ soit $\ln^2\left(\frac{100}{D\%}\right) = \frac{\pi^2 m^2}{1-m^2}$

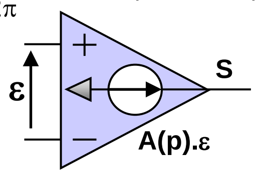
donc $\boxed{m = \sqrt{\frac{\ln^2\left(\frac{100}{D\%}\right)}{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{100}{D\%}\right)}}}$ soit $\boxed{m=0{,}2}$ dans ces conditions $\boxed{\omega o = \frac{\pi}{tpic \cdot \sqrt{1-m^2}} = 60\,rad/s}$

Exercice n°3 : Montage amplificateur à AOP vue comme un système bouclé

On vous propose de reprendre l'étude d'un montage à ampli-op de type amplificateur inverseur constitué de 2 résistances R1 & R2 comme le montre le schéma ci-contre.



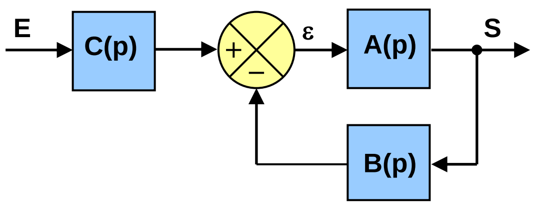
On donne le modèle interne d'un ampli-op dans lequel on suppose que Ao>>1 et le produit $Ao.fo = \frac{Ao.\omega o}{2\pi}$ correspond au produit gain bande de l'ampli-op.



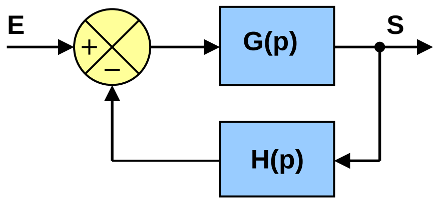
$$\boxed{A(p) = \frac{Ao}{1+\frac{p}{\omega o}}}$$

Q1 : Exprimer la tension ε en fonction de E, S, R1 & R2.

Q2 : Montrer que le montage amplificateur non inverseur peut alors se mettre sous la forme du schéma bloc proposé ci-contre. Exprimer les fonctions de transfert C(p) et B(p) en fonction de R1 et R2.



Q3 : Montrer que le schéma bloc précédent est équivalent au schéma bloc classique représenté ci-contre avec :



$$G(p) = A(p).C(p) \text{ et } H(p) = \frac{B(p)}{C(p)}$$

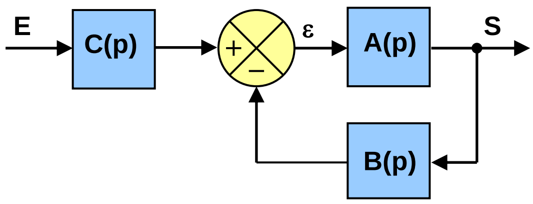
Q4 : Calculer la fonction de transfert en boucle fermé et la mettre sous la forme canonique suivante : $FTBF(p) = K \cdot \frac{1}{1+\frac{p}{\omega c}}$

Q5 : Montrer que si l'on considère Ao>>1 alors on retrouve l'expression classique pour K.

Q6 : Si l'on considère que R2=R1 quelle est la bande passante de ce montage pour un ampli-op dont le produit gain bande est de 4MHz ?

Q1 : En appliquant le théorème de Millman : $-\varepsilon = \frac{\frac{E}{R1}+\frac{S}{R2}}{\frac{1}{R1}+\frac{1}{R2}}$ donc $\varepsilon = -E\frac{R2}{R1+R2} - S\cdot\frac{R1}{R1+R2}$

Q2 : En regardant le schéma bloc on peut écrire :
ε=E.C(p)-B(p).S(p)



Donc par identification :
$C(p) = -\frac{R2}{R1+R2}$ et $B(p) = \frac{R1}{R1+R2}$

Q3 : En reprenant les équations du précédent schéma bloc il vient :
$S = A(p).C(p).E - A(p)B(p).S$ que l'on peut réécrire :

$S = A(p).C(p).\left(E - \frac{B(p)}{C(p)}\cdot S\right)$ ce qui ressemble à la forme du 2nd schéma bloc $S = G(p).(E - H(p)\cdot S)$

avec $G(p) = A(p).C(p)$ et $H(p) = \frac{B(p)}{C(p)}$

Q4 : Le calcul de la FTBF donne : $FTBF(p) = \frac{G(p)}{1+G(p).H(p)} = \frac{A(p).C(p)}{1+A(p).B(p)}$

soit $FTBF(p) = \frac{-\frac{Ao}{1+\frac{p}{\omega o}}\cdot\frac{R2}{R2+R1}}{1+\frac{Ao}{1+\frac{p}{\omega o}}\cdot\frac{R1}{R2+R1}}$ donc $FTBF(p) = \frac{-Ao.R2}{(R2+R1)\cdot\left(1+\frac{p}{\omega o}\right)+Ao.R1}$

que l'on peut écrire : $FTBF(p) = \frac{-Ao.R2}{R2+R1+Ao.R1}\cdot\frac{1}{1+\frac{p}{\omega o}\cdot\frac{R2+R1}{R2+R1+Ao.R1}}$

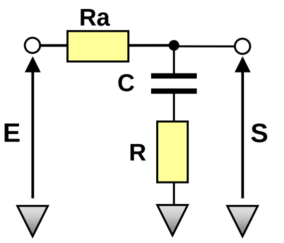
de la forme indiquée avec $\boxed{K = \frac{-Ao.R2}{R2+R1+Ao.R1}}$ et $\boxed{\omega c = \omega o\cdot\frac{R2+R1+Ao.R1}{R2+R1}}$

Q5 : Si Ao>>1 alors Ao.R1 >> R2+R1 donc $K = -\frac{R2}{R1}$ qui est l'amplification classique d'un montage ampli inverseur.

Q6 : Si l'on considère que R2=R1 et Ao>>1 alors $\omega c = \omega o\cdot\frac{Ao}{2}$ donc on obtient une bande passante de 2MHz pour un ampli-op dont le produit gain bande est de 4MHz même si l'amplification n'est que de -1.

Exercice n°4 : Transformée de Laplace & réponse indicielle

On considère le montage représenté ci-contre et pour lequel on souhaite connaitre la réponse indicielle en utilisant les tables de Transformée de Laplace.



Q1 : Exprimer la fonction de transfert de ce montage et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1+\tau.p}{1+\tau a.p}$. Exprimer les constantes de temps τ et τa en fonction des éléments du montage.

Q2 : On connecte sur l'entrée du montage un échelon de tension compris entre 0 et Eo. Montrer que la sortie S(p) peut s'écrire sous la forme $S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau a.p}$. Préciser les expressions de A & B.

Q3 : En utilisant les tables de transformée de Laplace (fournies en annexe page 4), exprimer l'évolution de la grandeur de sortie S(t) au cours du temps. Calculer S(t=0) et tracer l'allure de cette réponse.

Q1 : On reconnait une structure de type pont diviseur donc

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{R + \frac{1}{Cp}}{R + Ra + \frac{1}{Cp}} = \frac{1+RCp}{1+(R+Ra)Cp}$$ de la forme indiquée avec $\tau = RC$ et $\tau a = (R+Ra)C$

Q2 :

$$S(p) = \frac{1+\tau.p}{1+\tau a.p} \cdot E(p) = \frac{1+\tau.p}{1+\tau a.p} \cdot \frac{Eo}{p}$$ on peut donc écrire que $S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau a.p} = \frac{A + A\tau ap + Bp}{(1+\tau a.p)p}$

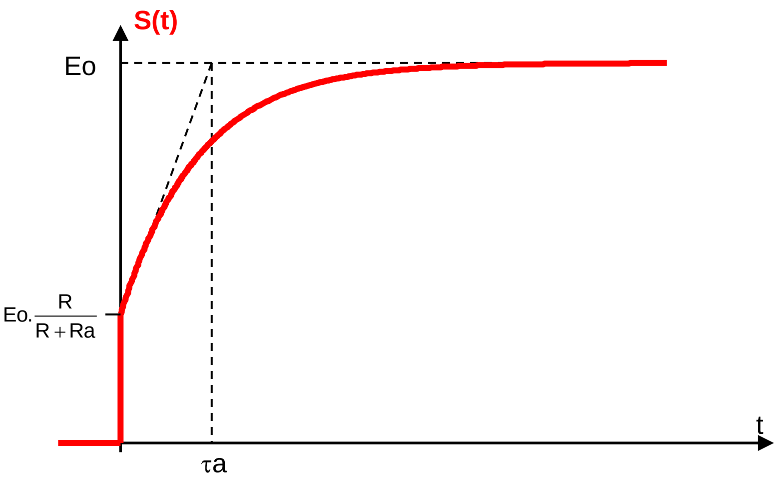
Par identification $A = Eo$ et $A\tau a + B = Eo\tau$ soit $B = Eo(\tau - \tau a)$

donc $S(p) = \frac{Eo}{p} + \frac{Eo(\tau-\tau a)}{1+\tau a.p} = \frac{Eo}{p} + \frac{Eo(\tau-\tau a)}{\tau a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau a}+p}$

Q3 : en utilisant la table des Transformées de Laplace inverse il vient

$$\boxed{S(t) = Eo.U(t) + \frac{Eo(\tau-\tau a)}{\tau a} \cdot e^{-\frac{t}{\tau a}} U(t)}$$

pour t=0 $S(t=0) = Eo + \frac{Eo(\tau-\tau a)}{\tau a} = Eo \cdot \frac{\tau}{\tau a} = Eo.\frac{R}{R+Ra}$



Exercice n°5 : Un oscillateur ou un système asservi volontairement instable ?

Dans le cadre de cet exercice, on vous propose d'étudier un oscillateur permettant de délivrer une tonalité audio. Pour effectuer l'étude de cet oscillateur on vous propose d'adopter l'approche consistant à modéliser ce dispositif sous la forme d'un système asservi que l'on rend volontairement instable.

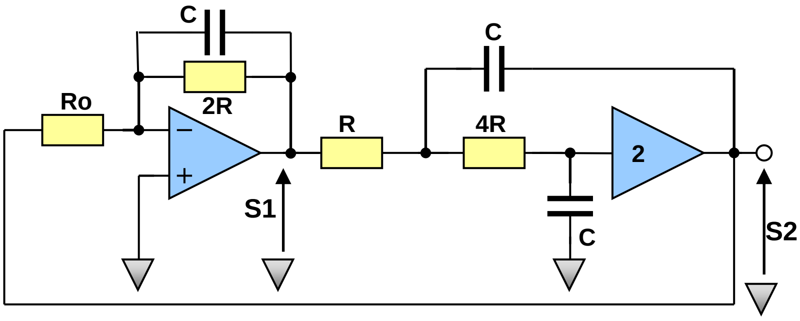


Figure 1 : Oscillateur

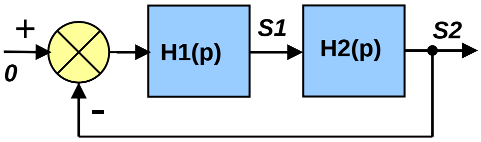


Figure 2 : Schéma bloc de l'oscillateur

Pour le schéma bloc représenté sur la figure 2, on montre que la fonction de transfert reliant S2 à S1 peut se mettre sous la forme :

$$H2(p) = \frac{2}{1 + 4RCp + 4(RCp)^2}$$

Q1 : Quel montage simple à base d'amplificateur opérationnel permet de réaliser le bloc amplification par 2 ?

Q2 : Exprimer S1(p) en fonction de S2(p), Ro, R, C et la variable de Laplace p. En déduire l'expression de la fonction de transfert H1(p) dans le schéma bloc représenté sur la figure 2. (attention au signe - dans le schéma bloc)

Q3 : En effectuant les factorisations nécessaires, montrer que la fonction de transfert en boucle ouverte peut s'écrire sous la forme indiquée ci-contre.
Exprimer K en fonction de Ro et R et ωo en fonction de R et C. Vérifier que K>0.

$$FTBO(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{\omega o}\right)^3}$$

Q4 : Tracer le diagramme de Bode asymptotique et réel (gain & phase) de la fonction de transfert en BO pour un coefficient K=1.

Q5 : Exprimer la pulsation $\omega\pi$ (qui sera la fréquence des oscillations) pour laquelle la phase de la fonction de transfert en BO passe par $-\pi$. En déduire une condition sur la valeur de K qui rend le système instable.

Q1 : Un montage amplificateur non inverseur avec 2 résistances identiques.

Q2 : On reconnait une structure de type inverseur donc :

$$\frac{S1(p)}{S2(p)} = -\frac{Zeq}{Ro} \quad \text{avec } Zeq = \frac{2R}{1 + 2RCp} \quad \text{donc } \boxed{\frac{S1(p)}{S2(p)} = -\frac{2R}{Ro} \cdot \frac{1}{1 + 2RCp}}$$

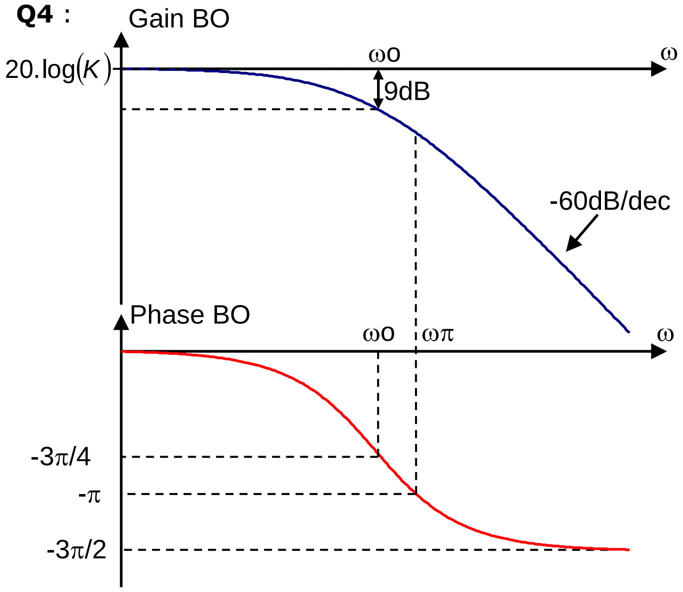
En prenant en considération le soustracteur dans le schéma bloc

il est possible d'écrire $\boxed{H1(p) = \frac{2R}{Ro} \cdot \frac{1}{1 + 2RCp}}$

Q3 : $FTBO(p) = H1(p).H2(p) = \frac{2R}{Ro} \cdot \frac{1}{1 + 2RCp} \cdot \frac{2}{1 + 4RCp + 4(RCp)^2} = \frac{4R}{Ro} \cdot \frac{1}{(1 + 2RCp)^3}$ de la forme indiquée

avec $\boxed{K = \frac{4R}{Ro}}$ et $\boxed{\omega o = \frac{1}{2RC}}$

Q4 :



Q5 : $Arg(FTBO) = -3.\arctan\left(\frac{\omega}{\omega o}\right)$

$-\pi = -3.\arctan\left(\frac{\omega\pi}{\omega o}\right)$ donc $\omega\pi = \omega o.\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ soit

$\boxed{\omega\pi = \omega o.\sqrt{3}}$

Le système est instable si $|FTBO(\omega\pi)|>1$ soit

$\frac{K}{\left(\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega o.\sqrt{3}}{\omega o}\right)^2\right)}\right)^3} > 1$ soit $K > 8$