poujouly.net
@poujouly

Décomposition en série de Fourier

Théorème

Un signal périodique v(t) de période T_0 peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquence multiple de $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et de sa valeur moyenne.

Expressions & propriétés de la décomposition en série de Fourier (DSF)

On décompose v(t) sous la forme suivante : $v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin(n\omega_0 t)$

$$V_0 = \overline{v(t)} = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} v(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{(T_0)} v(t).\cos(n\omega_0 t)dt \qquad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{(T_0)} v(t).\sin(n\omega_0 t)dt$$

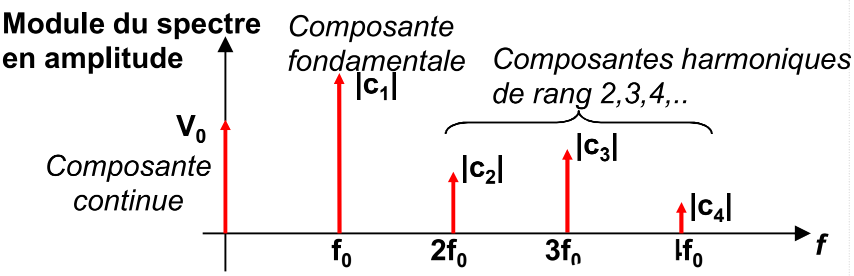
En regroupant les termes an & bn on obtient :

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad \{+\pi \text{ si } a_n < 0$$

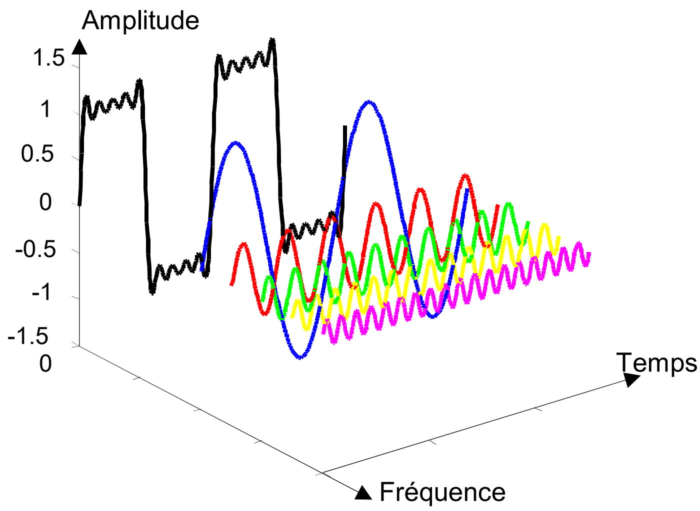
- ❑ La composante sinusoïdale à la fréquence fo s’appelle la fondamentale du signal v(t)
- ❑ si v(t) est pair {v(t)=v(-t) ∀t} alors les coefficients bn sont nuls
- ❑ si v(t) est impair {v(t)=-v(-t) ∀t} alors les coefficients an sont nuls
- ❑ si{v(t+To/2)=-v(t) ∀t} alors v(t) ne contient que des harmoniques impairs

Le spectre en amplitude : Une représentation graphique de la DSF

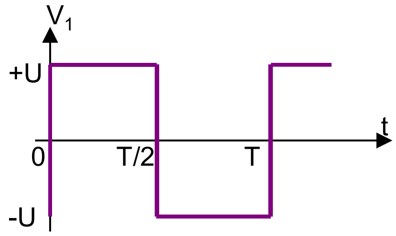
Il s’agit d’un mode de représentation très utilisé en électronique. Cette représentation renseigne sur l’amplitude de chaque composante fréquentielle d’un signal donné comme l’indique la figure suivante :



La figure représentée ci-contre permet de fournir un autre regard sur la décomposition en série de Fourier.
L'illustration proposée montre comment un signal carré symétrique peut être reconstruit à partir de signaux sinusoïdaux aux fréquences F, 3F, 5F, 7F et 9 F .

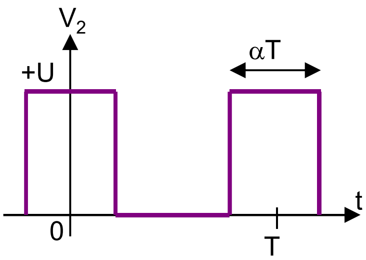


Décomposition en série de Fourier des signaux usuels

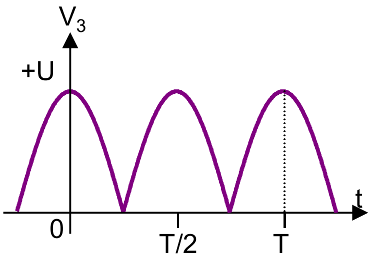


$$V_1(t) = \frac{4.U}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \sin((2n+1)\omega t)$$

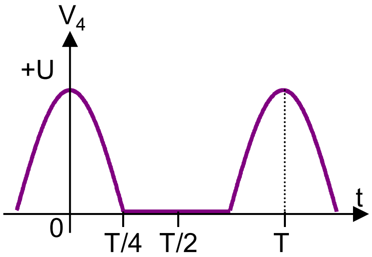
$$V_1(t) = \frac{4.U}{\pi} \cdot \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5\omega t) + ... \right]$$



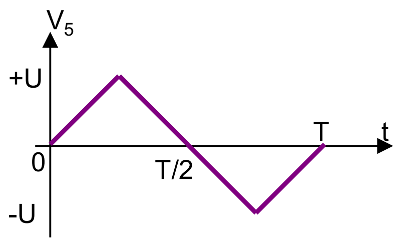
$$V_2(t) = \alpha U + \frac{2.U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n\alpha\pi)\cos(n\omega t)$$



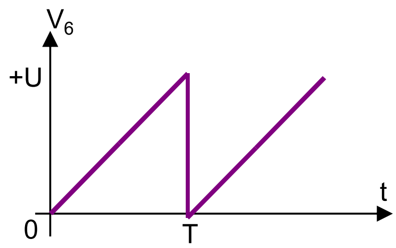
$$V_3(t) = \frac{2U}{\pi} - \frac{4.U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} \cos(2n\omega t)$$



$$V_4(t) = \frac{U}{\pi} + \frac{U}{2} \cos(\omega t) + \frac{2.U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} \cos(2n\omega t)$$



$$V_5(t) = \frac{8.U}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)\omega t)$$



$$V_6(t) = \frac{U}{2} - \left[\frac{U}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega t) \right]$$