



Éléments de correction



Exercice n°1 : Etude d'un filtre passe bas du 2nd ordre

Q1: Il s'agit d'un montage ampli non inverseur

$$V_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_G}\right) \cdot V_+ \text{ de la forme } V_o = k \cdot V_+ \text{ avec } k = 1 + \frac{R_F}{R_G}$$

Q2:

$$V_A = \frac{\frac{V_i}{R} + \frac{V_o}{kR} + V_o \cdot j\omega C}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{V_i + \frac{V_o}{k} + V_o j\omega RC}{2 + j\omega RC}$$

Q3: Il s'agit d'un simple Filtre RC passe bas

$$V_+ = \frac{V_o}{k} = V_A \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Q4: En utilisant les 2 équations précédentes :

$$\frac{V_o}{k} \cdot (1 + j\omega RC) = \frac{V_i + \frac{V_o}{k} + V_o j\omega RC}{2 + j\omega RC}$$

$$\frac{V_o}{k} \left[(1 + j\omega RC)(2 + j\omega RC) - 1 - k j\omega RC \right] = V_i$$

$$\frac{V_o}{k} \left[1 + j\omega RC(3-k) + (j\omega RC)^2 \right] = V_i$$

$$\text{soit } \frac{V_o}{V_i} = \frac{k}{1 + j\omega RC(3-k) + (j\omega RC)^2}$$

Q5: pour $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $f_c = f_o = \frac{1}{2\pi RC}$ donc $RC = 53 \mu s$

En utilisant le petit utilitaire "Meilleur couple RC" sur le site poujouly.net on propose $R = 21 k\Omega$ et $C = 2,2 nF$

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3 - k = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = 3 - \sqrt{2} = 1,586$$

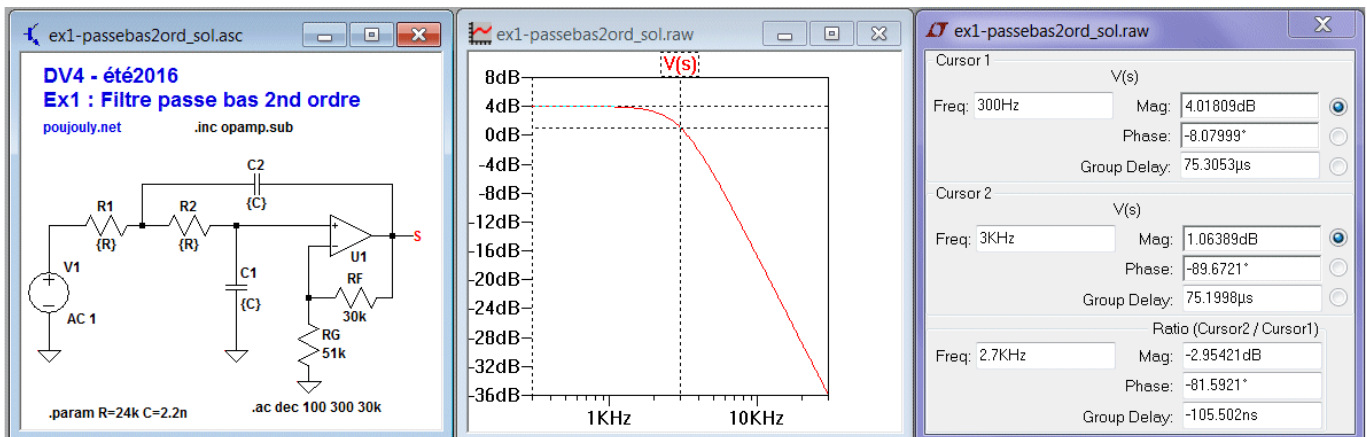
soit $\frac{R_F}{R_G} = 0,586$ on propose $R_F = 30 k\Omega$ $R_G = 51 k\Omega$

On reconnaît la forme d'un Filtre passe bas du 2nd ordre

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{k}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_o} + \left(\frac{j\omega}{\omega_o}\right)^2}$$

$$\text{avec } \omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$\text{et } \frac{2m}{\omega_o} = RC(3-k) \text{ soit } m = \frac{3-k}{2}$$





Exercice n°2 : Etude d'un filtre passe haut du 2nd ordre



$$Q_1: V_{+} = \frac{V_{in} \cdot j\omega C + \frac{V_1}{R}}{j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_b}} = \frac{V_{in} j\omega C R R_b + V_1 R_b}{R + R_b + j\omega C R R_b} \quad (1)$$

$$Q_2: V_{-} = \frac{V_1 j\omega C + \frac{V_o}{R}}{j\omega C + \frac{1}{R}} = \frac{V_1 j\omega C R + V_o}{j\omega C R + 1} \quad (2)$$

Q3: il s'agit d'un simple pont diviseur de tension $V_{+} = \frac{V_o}{2}$ (3)

$$Q_4: (1) \& (2) \Rightarrow \frac{V_o}{2} = \frac{V_1 j\omega C R + V_o}{j\omega C R + 1}$$

$$\text{donc } V_o(1 + j\omega C R) = 2V_1 j\omega C R + 2V_o$$

$$V_1 = \frac{V_o(j\omega C R - 1)}{2j\omega C R} \quad (4)$$

il s'agit bien d'une fonction de transfert passe haut du 2^e ordre

$$\text{de la forme } \frac{2 \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{et } \frac{2m}{\omega_0} = \frac{R^2 C}{R_b} \quad \text{soit } m = \frac{R}{2R_b}$$

en effectuant les applications numériques

$$f_0 = 297 \text{ Hz (conforme au 300 Hz)}$$

$$m = 0,716 \approx 0,707 \quad \text{correspondent au r\u00e9ponse Butterworth}$$

Par ailleurs on note une amplification de 2.

$$(1) \& (3) \Rightarrow V_o(R + R_b + j\omega C R R_b) = 2V_{in} j\omega C R R_b + 2V_1 R_b$$

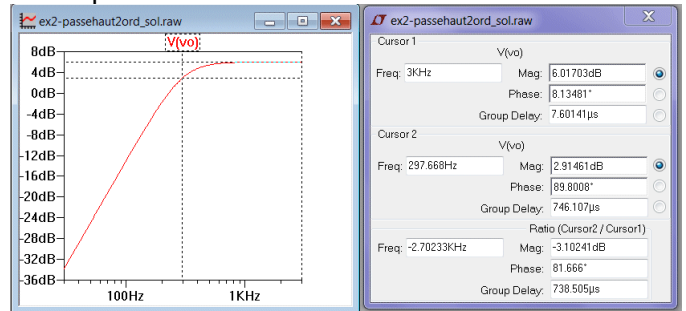
$$V_o(R + R_b + j\omega C R R_b) = 2V_{in} j\omega C R R_b + \frac{V_o(j\omega C R - 1) \cdot R_b}{j\omega C R}$$

$$V_o j\omega C R (R + R_b + j\omega C R R_b) - V_o(j\omega C R - 1) \cdot R_b = 2V_{in} (j\omega C R)^2 R_b$$

$$V_o \left(R_b + j\omega^2 R^2 C + (j\omega C R)^2 R_b \right) = 2V_{in} (j\omega C R)^2 R_b$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{2 \cdot (j\omega C R)^2}{1 + j\omega^2 \frac{R^2 C}{R_b} + (j\omega C R)^2}$$

La simulation LTSpice montre clairement qu'il s'agit bien d'un passe haut du 2nd ordre avec une fr\u00e9quence de coupure de 300Hz et une amplification de 2 (6dB) en bande passante.



Exercice n°3 : Etude d'un filtre passe bande pour analyseur de spectre audio



$$Q_1: V_{-} = \frac{\frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_{HP}}{R_2} + \frac{V_{LP}}{R_2} + \frac{V_{BP}}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 0$$

$$\text{donc } \frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_{HP}}{R_2} + \frac{V_{LP}}{R_2} + \frac{V_{BP}}{R_3} = 0 \quad (1)$$

Q2: on ne connait une structure de type ampli-inverseur

$$\text{donc } \frac{V_{LP}}{-G} = -\frac{1}{j\omega C} \cdot V_{BP} \quad \text{donc } V_{LP} = \frac{G}{j\omega C} \cdot V_{BP} \quad (2)$$

$$Q_3: \text{par analogie } V_{BP} = \frac{G}{j\omega C} \cdot V_{HP}$$

$$\text{soit } V_{HP} = \frac{j\omega C}{G} \cdot V_{BP} \quad (3)$$

$$Q_4: (2) \& (3) \Rightarrow \frac{V_{in}}{R_1} + \frac{j\omega C}{G \cdot R_2} V_{BP} + \frac{G}{j\omega C} \cdot \frac{V_{BP}}{R_2} + \frac{V_{BP}}{R_3} = 0$$

$$\text{donc } -\frac{V_{in}}{R_1} = V_{BP} \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{G}{j\omega C \cdot R_2} + \frac{j\omega C}{G R_2} \right)$$

$$-\frac{V_{in}}{R_1} = V_{BP} \cdot \left(\frac{j\omega C R_2 G + G^2 R_3 + (j\omega C)^2 R_3}{R_3 \cdot j\omega C \cdot R_2 \cdot G} \right)$$

$$-V_{in} \cdot \frac{R_3 j\omega C R_2 G}{R_1} = V_{BP} \cdot G^2 R_3 \left(1 + \frac{j\omega C \cdot R_2}{G \cdot R_3} + \frac{(j\omega C)^2}{G^2} \right)$$

$$\text{donc } \frac{V_{BP}}{V_{in}} = \frac{-\frac{j\omega C \cdot R_2}{G \cdot R_1}}{1 + \frac{j\omega C \cdot R_2}{G \cdot R_3} + \frac{(j\omega C)^2}{G^2}} \quad \text{de la forme indiqu\u00e9e avec}$$

$$\omega_0 = \frac{G}{RC}$$

$$\frac{1}{\omega_0 Q} = \frac{RC \cdot R_2}{G \cdot R_3} \Rightarrow Q = \frac{R_3}{R_2}$$

$$\frac{T_{max}}{\omega_0 Q} = -\frac{RC \cdot R_2}{G \cdot R_1} \Rightarrow T_{max} = -\frac{R_3}{R_1}$$

Q5: Gain max = 0dB $\Rightarrow |T_{max}| = 1$

donc $R_3 = R_1$

$Q = \sqrt{2} \Rightarrow R_3 = \sqrt{2} \times R_2 = 14,1k\Omega$

Q6: pour $G=1$ $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 125Hz$

donc $R = 27k\Omega$ et $C = 57nF$ par ex

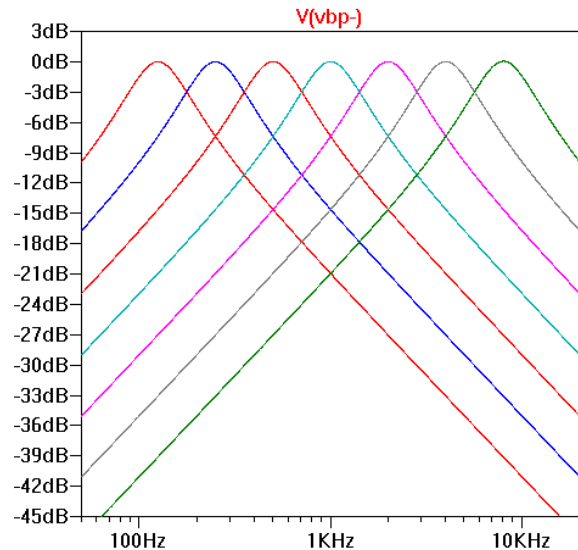
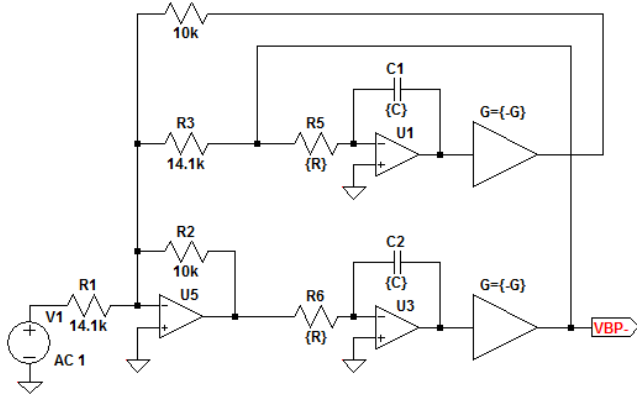
En effectuant la simulation LTSpice on constate que chaque bande d'analyse se recouvre à -3dB et le réglage du paramètre G permet de passer à l'octave supérieur (lorsque la fréquence double).

DV4 - été2016

Ex3 : Filtre analogique programmable

poujouly.net .step param G list 1 2 4 8 16 32 64

.inc opamp.sub.inc SP.lib.param R=27k C=47n
.ac dec 1000 50 20k



Exercice n°4 : Antenne pour un circuit de mesure de pression de pneu

Q1: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$ soit $L_1 = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C_1}$ donc $L_1 = 7,37mH$

Q2: $R_P = Q \cdot L_1 \cdot (2\pi f_0)$ soit $R_P = 202,6k\Omega$

Q3: Le montage constitué de L_1 et C_1 se comporte comme un circuit ouvert à la fréquence $f=f_0$. On retrouve donc un générateur de courant I_r qui débite dans la résistance de perte R_P . On obtient donc un signal sinusoïdal d'amplitude $\approx 203mV$

Exercice n°5 : Un filtre passe bande pour un récepteur IR

Q1: $V_A = \frac{\frac{E}{R} + \frac{S}{R} + \frac{S}{K} j\omega C\omega}{\frac{2}{R} + 2j\omega C\omega} = \frac{E + S + \frac{S}{K} j\omega RC\omega}{2 + 2j\omega RC\omega}$

Q2: il s'agit d'un filtre passe haut donc

$\frac{S}{K} = \frac{j\omega RC\omega}{1 + j\omega RC\omega} \times V_A$ soit $V_A = \frac{S}{K} \cdot \frac{1 + j\omega RC\omega}{j\omega RC\omega}$

Q3: en effectuant l'égalité des 2 équations précédentes:

$\frac{S}{K} (1 + j\omega RC\omega) (2 + 2j\omega RC\omega) = E j\omega RC\omega + S j\omega RC\omega + \frac{S}{K} 2(j\omega RC\omega)^2$

$\frac{S}{K} (2 + j\omega RC\omega + j\omega RC\omega + (j\omega RC\omega)^2) = E j\omega RC\omega + S j\omega RC\omega + \frac{S}{K} 2(j\omega RC\omega)^2$

$\frac{S}{K} (1 + j\omega RC\omega (3-k) + (j\omega RC\omega)^2) = E j\omega RC\omega$

soit $\frac{S}{E} = \frac{k j\omega RC\omega}{1 + j\omega RC\omega (3-k) + (j\omega RC\omega)^2}$ de la forme indiquée avec:

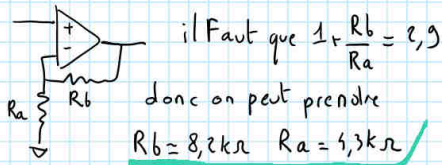
$\omega_0 = \frac{1}{RC}$

$\frac{1}{Q\omega_0} = RC(3-k)$ donc $Q = \frac{1}{3-k}$

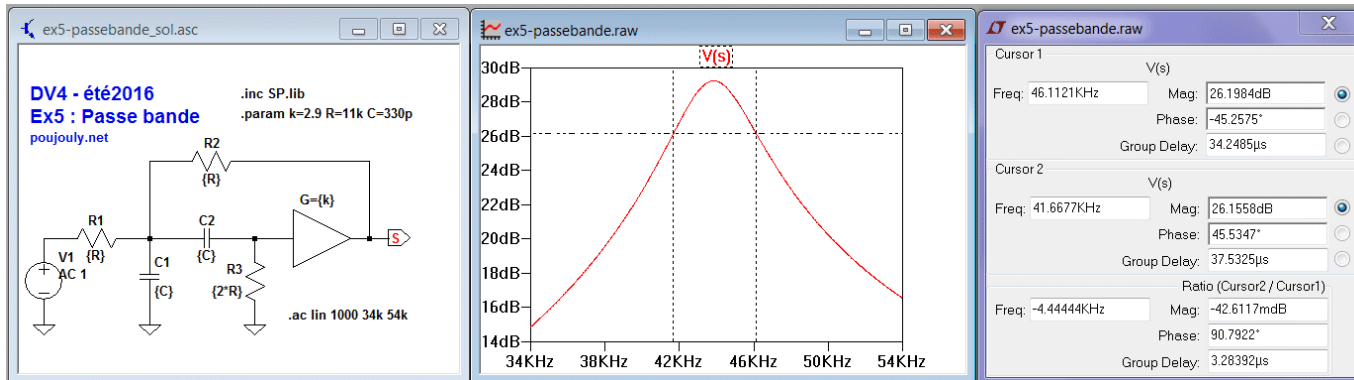
$\frac{T_{max}}{Q\omega_0} = kRC$ donc $T_{max} = \frac{k}{3-k}$

Qj $Q=10 \Rightarrow 3-k=0,1$ donc $k=2,9$
 $C=330\mu F \Rightarrow R=\frac{1}{27f_0C}$ avec $f_0=44kHz$ donc $R=11k\Omega$

l'amplification k peut être réalisée à partir d'un montage ampli non inverseur



La simulation LTSpice permet de vérifier que le filtre passe bande est bien centrée sur la fréquence de 44kHz. Les curseurs sont placés à 3dB en dessous du gain maximum afin de déterminer la bande passante qui est de 4,4kHz. Comme $Q=f_0/BP$ on retrouve bien la valeur de $Q=10$. Par ailleurs le gain maximum est donné par la relation $G_{max} = 20 \cdot \log(T_{max}) = 20 \cdot \log(2,9) = 29,2dB$ ce qui correspond bien au résultat observé sur la simulation.



Exercice n°6 : Un filtre gaussien

Q1 : Montage amplificateur inverseur $\Rightarrow V_3(j\omega) = -V_2(j\omega)$

Q2 : Montage intégrateur inverseur $\Rightarrow V_2(j\omega) = \frac{-1}{jRC\omega} \cdot V_1(j\omega)$ soit $V_1(j\omega) = -jRC\omega \cdot V_2(j\omega)$

Q3 : Passe bas sommateur $\Rightarrow V_1(j\omega) = \frac{-R_2}{1+jR_2C\omega} \left(\frac{E(j\omega)}{R_1} + \frac{V_3(j\omega)}{R} \right)$ $V_1(j\omega)(1+jR_2C\omega) = -\frac{R_2}{R_1}E(j\omega) - \frac{R_2}{R}V_3(j\omega)$

Q4 : On remplace V1 et V3 par leur expression dépendant de V2 donc :

$$-jRC\omega(1+jR_2C\omega)V_2(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}E(j\omega) + \frac{R_2}{R}V_2(j\omega) \text{ soit } V_2(j\omega) \left(\frac{R_2}{R} + jRC\omega + (j\omega)^2 C^2 R R_2 \right) = \frac{R_2}{R_1}E(j\omega)$$

Donc $V_2(j\omega) \left(1 + \frac{jR^2C\omega}{R_2} + (j\omega)^2 C^2 R^2 \right) = \frac{R}{R_1}E(j\omega)$ soit $\frac{V_2(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{\frac{R}{R_1}}{1 + \frac{jR^2C\omega}{R_2} + (j\omega)^2 C^2 R^2}$ de la forme indiquée avec :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad A = \frac{R}{R_1} \quad \text{et} \quad m = \frac{R}{2R_2}$$

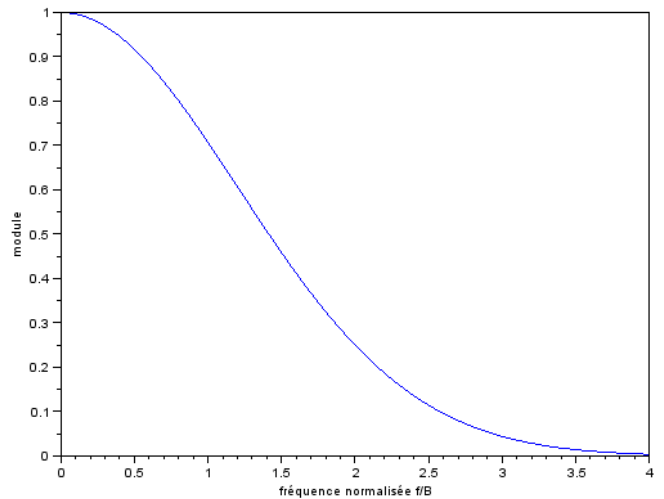
Q5 : En fixant R, le condensateur C règle la pulsation propre, R1 détermine l'amplification et R2 fixe le coefficient d'amortissement.

Q6 : $|H(f=0)|=1$ Q7 : Rechercher la fréquence de coupure f_c revient à résoudre $|H(f_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit

$$\exp\left(\frac{-\ln(2) \cdot f_c^2}{2B^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ donc } \frac{-\ln(2) \cdot f_c^2}{2B^2} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\ln(2)}{2} \text{ donc } \boxed{f_c = B}$$

Q8:

```
// Tracé du module du filtre gaussien :  
x=0:0.05:4; //x=f/B  
H=exp(-0.5*log(2)*x.^2);  
plot(x,H)  
ylabel('module');  
xlabel('fréquence normalisée f/B');
```



Q9 : on doit donc réaliser pour la cellule n°1 :
 $m=0,5$ et $f_0=BT.D.1,85=55,5\text{kHz}$
soit $C=2,2\text{nF}$ $R=1,3\text{k}\Omega$ $R_1=1,3\text{k}\Omega$ $R_2=1,3\text{k}\Omega$

Pour la cellule n°2 :
 $m=0,9$ et $f_0=BT.D.1,17=35,1\text{kHz}$
soit $C=2,2\text{nF}$ $R=2\text{k}\Omega$ $R_1=2\text{k}\Omega$ $R_2=1,14\text{k}\Omega$

Q10 : Voir méthode de mesure pour un filtre passe bas du 2nd ordre (poly de cours)

Q11:

```
// Tracé du filtre gaussien idéal:  
BT=0.3;D=100e3;B=BT*D;  
f=0:B/100:4*B;  
Hideal=exp(-0.5*log(2)*(f/B).^2);  
plot(f,Hideal,'r');  
  
// Tracé du filtre gaussien approché:  
m1=0.5;fo1=BT*D*1.85;  
m2=0.9;fo2=BT*D*1.17;  
H1=((1-(f/fo1).^2).^2+(2*m1*f/fo1).^2).^-0.5;  
H2=((1-(f/fo2).^2).^2+(2*m2*f/fo2).^2).^-0.5;  
Hanalog=H1.*H2;  
plot(f,Hanalog,'b');
```

