Devoir N°3 : CORRECTION
Autour de quelques filtres du 2nd ordre

Mercredi 31 juillet 2013 S.POUJOULY http://poujouly.net

Exercice n°1 : Un filtre audio en sortie d'un récepteur

Q1 : $VA(j\omega)=\dfrac{\dfrac{Ve(j\omega)}{R}+\dfrac{Vs(j\omega)}{R}}{\dfrac{3}{R}+jC_1\omega}$ donc $\boxed{VA(j\omega)=\dfrac{Ve(j\omega)+Vs(j\omega)}{3+jRC_1\omega}}$

Q2 : Il s'agit d'un montage intégrateur pur donc $\boxed{Vs(j\omega)=-VA(j\omega).\dfrac{1}{jRC_2\omega}}$

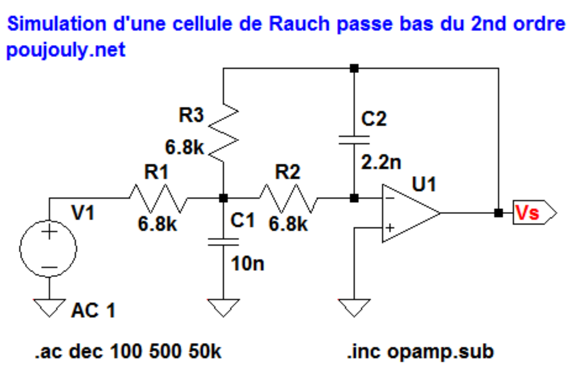
Q3 : En associant les 2 équations précédentes $-jRC2\omega.Vs(j\omega)=\dfrac{Ve(j\omega)+Vs(j\omega)}{3+jRC_1\omega}$

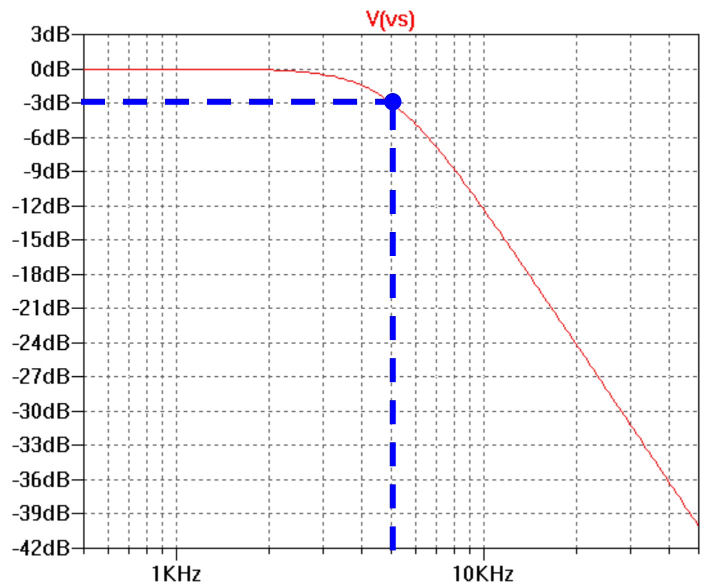
Soit $-Vs(j\omega).\left[3jRC_2\omega+R^2C_1C_2(j\omega)^2\right]=Ve(j\omega)+Vs(j\omega)$ donc $T(j\omega)=\dfrac{Vs(j\omega)}{Ve(j\omega)}=\dfrac{-1}{1+3RC_2(j\omega)+R^2C_1C_2(j\omega)^2}$

Q4 : de la forme: $T(j\omega)=\dfrac{Vs(j\omega)}{Ve(j\omega)}=\dfrac{-1}{1+2m\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)+\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$ avec $\boxed{\omega o=\dfrac{1}{R\sqrt{C_1.C_2}}}$ et $\dfrac{2m}{\omega o}=3RC_2$ donc $\boxed{m=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{C_2}{C_1}}}$

Q5 : On fixe C_2=2,2nF donc $C_1=\dfrac{9}{4.m^2}\cdot C_2$ soit $\boxed{C_1=9{,}9nF\ (10nF)}$. Comme m=0,707 la fréquence de coupure correspond à la fréquence propre fo donc $R=\dfrac{1}{2\pi.fo.\sqrt{C_1.C_2}}$ soit $\boxed{R=6{,}8k\Omega}$

Q6: Fichier de simulation (à télécharger) & résultats





On vérifie bien que pour f=fc=fo=5kHz, la courbe de gain passe bien par -3dB.

Exercice n°2 : Etude d'un filtre pour un analyseur de spectre audio

Q1 : $Vm = -\frac{R2}{R1} \cdot Ve - \frac{R2}{R3} \cdot Vs$ **Q2 :** $Vh = Vm - Vl$ **Q3 :** $Vs = \frac{jf}{fo} \cdot Vh$ soit et $Vl = \frac{jf}{fo} \cdot Vs$

Q4 : $Vs = \frac{jf}{fo} \cdot (Vm - Vl) = \frac{jf}{fo} \cdot \left(-\frac{R2}{R1} \cdot Ve - \frac{R2}{R3} \cdot Vs - \frac{jf}{fo} \cdot Vs \right)$

donc $Vs \left[1 + \frac{R2}{R3} \cdot \frac{jf}{fo} + \left(\frac{jf}{fo} \right)^2 \right] = -\frac{R2}{R1} \cdot \frac{jf}{fo} \cdot Ve$ soit $T(jf) = \frac{Vs(jf)}{Ve(jf)} = \frac{-\frac{R2}{R1} \cdot \frac{jf}{fo}}{1 + \frac{R2}{R3} \cdot \frac{jf}{fo} + \left(\frac{jf}{fo} \right)^2} = -\frac{R3}{R1} \frac{\frac{R2}{R3} \cdot \frac{jf}{fo}}{1 + \frac{R2}{R3} \cdot \frac{jf}{fo} + \left(\frac{jf}{fo} \right)^2}$

De la forme d'un filtre passe bande $T(jf) = \frac{Vs(jf)}{Ve(jf)} = A\max \cdot \frac{\frac{1}{Q} \cdot \frac{jf}{fo}}{1 + \frac{1}{Q} \cdot \frac{jf}{fo} + \left(\frac{jf}{fo} \right)^2}$ avec $\boxed{A\max = -\frac{R3}{R1}}$ et $\boxed{Q = \frac{R3}{R2}}$

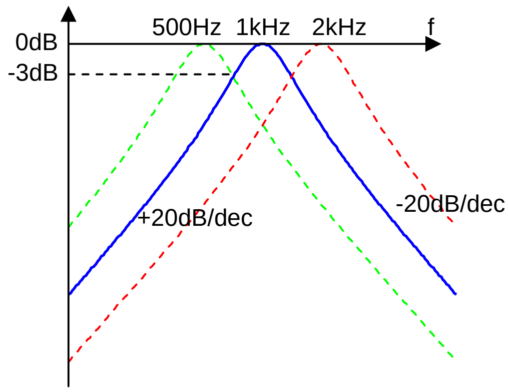
Q5 : $\boxed{R3 = 5{,}1k\Omega}$ et $\boxed{R1 = 5{,}1k\Omega}$

Q6 : $Fclk = 100kHz \Rightarrow fo = 1kHz$

Le choix $Q = \sqrt{2}$ permet d'obtenir un recouvrement des tracés à -3dB comme l'indique la figure suivante. Les 2 fréquences de coupure fc1 et fc2 correspondent au milieu géométrique sur une échelle logarithmique donc

$$\boxed{fc1 = \sqrt{500Hz.1kHz} = 707Hz}$$

$$\boxed{fc2 = \sqrt{1kHz.2kHz} = 1414Hz}$$



Exercice n°3 : Analyse d'un extrait de documentation constructeur

Q1 / Q2 : On reconnaît une structure de Sallen & Key de type passe haut.

Q3 : Si on appelle A le point commun aux 2 condensateurs et à la résistance R1, en utilisant le théorème de Millman on peut écrire que $VA = \dfrac{\dfrac{Vs}{R1} + Ve.jC\omega + Vs.jC\omega}{\dfrac{1}{R1} + 2jC\omega}$ soit $VA = \dfrac{Vs(1+jR1C\omega) + Ve.jR1C\omega}{1+2jR1C\omega}$

Entre le potentiel VA et l'entrée + de l'AOP on reconnaît un simple montage passe haut RC donc :

$Vs = VA.\dfrac{jR2C\omega}{1+jR2C\omega}$ soit $\dfrac{Vs(1+jR2C\omega)}{jR2C\omega} = VA$

En regroupant les 2 équations précédentes il vient :

$$\frac{Vs(1+jR2C\omega)}{jR2C\omega} = \frac{Vs(1+jR1C\omega) + Ve.jR1C\omega}{1+2jR1C\omega}$$

$$Vs(1+jR2C\omega)(1+2jR1C\omega) = Vs(jR2C\omega)(1+jR1C\omega) + Ve.R1R2C^2(j\omega)^2$$

$$Vs(1+jR2C\omega)(1+2jR1C\omega) - Vs(jR2C\omega)(1+jR1C\omega) = Ve.R1R2C^2(j\omega)^2$$

$$Vs\left(1+2jR1C\omega + R1.R2C^2(j\omega)^2\right) = Ve.R1R2C^2(j\omega)^2$$

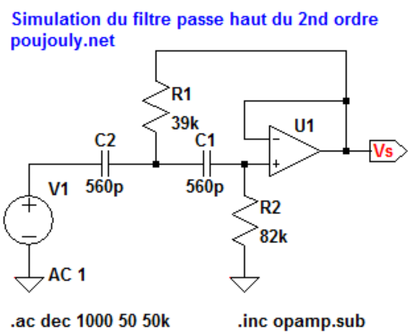
Soit $\boxed{\dfrac{Vs}{Ve} = \dfrac{R1R2C^2(j\omega)^2}{1+2jR1C\omega + R1.R2C^2(j\omega)^2}}$ de la forme $\dfrac{Vs}{Ve} = \dfrac{\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}{1+2m\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)+\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$

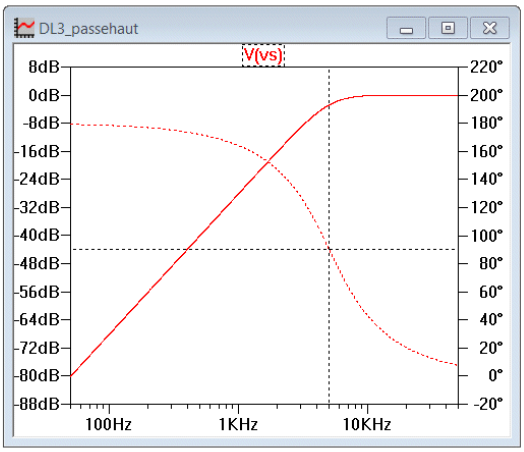
avec $\boxed{\omega o = \dfrac{1}{C\sqrt{R1R2}}}$ et $\dfrac{2m}{\omega o} = 2R1C$ soit $\boxed{m = \sqrt{\dfrac{R1}{R2}}}$

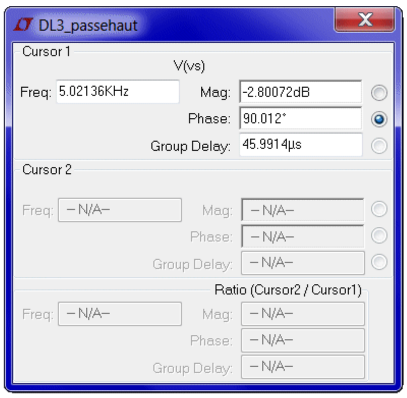
Q4 : $\boxed{m=0{,}69}$ et $\boxed{fo=5025Hz}$

Q5 : Dans un filtre passe haut du 2nd ordre, la courbe de phase passe par +90° à f=fo. A cette fréquence la fonction de transfert peut s'écrire $T = \dfrac{-1}{2m.j} = \dfrac{j}{2m}$. En mesurant le gain à cette fréquence on en déduit directement la valeur de m.

Une simulation de type AC permet de tracer la courbe de phase et en plaçant le curseur à +90° on retrouve une valeur de f très proche de fo et un gain de -2,8dB ce qui correspond à une valeur de m=0,69.







Q6 : Comme m est proche de 0,7 on peut considérer que fo est quasiment la fréquence de coupure fc. Comme le filtre est du 2nd ordre on obtient donc une atténuation de 40dB à f=500Hz et donc de 80dB à f=50Hz ce qui correspond bien aux valeurs de l'énoncé et aux résultats de la simulation précédente.