Test éclair n°11 : Traitement numérique du signal & Transformée en z

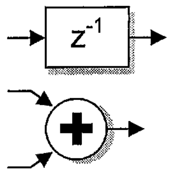
UNIVERSITÉ PARIS SUD — SYEL
IUT DE CACHAN Dépt GEii1 DUT APP 2

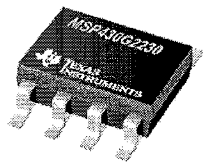
Vendredi 30 mars 2018 — S.POUJOULY — @poujouly — http://poujouly.net

NOM, Prénom : CORRECTION

Partie A : Etude d'un filtre numérique simple

On s'intéresse ici à un filtre passe bas numérique dont les valeurs des coefficients sont très simplifiés pour réduire les opérations de multiplications et donc le temps de calcul. Le traitement numérique implanté dans le µC est $y[n]=2.x[n]-2.x[n-1]+3.y[n-1]$





Q1 : Exprimer la fonction de transfert H(z)

$$Y(z)=2X(z)-2z^{-1}X(z)+3z^{-1}Y(z)$$

$$Y(z)\left(1-3z^{-1}\right)=X(z)\left(2-2z^{-1}\right) \qquad H(z)=\frac{2-2z^{-1}}{1-3z^{-1}}$$

Q2 : On vous rappelle que $z^{-1}=e^{-j\omega Te}=\cos(\omega.Te)-j.\sin(\omega.Te)$. Montrer que la fonction de transfert peut alors s'exprimer sous la forme $H(j\omega)=\frac{A+jB}{C+jD}$ où vous préciserez les expressions de A, B, C & D.

$$H(j\omega)=\frac{2-2\cos(\omega Te)+2j\sin(\omega Te)}{1-3\cos(\omega Te)+3j\sin(\omega Te)}$$

$\cos(\omega Te)$
$=\cos(2\pi f/Fe)$

$A=2-2\cos(\omega Te)$ $\qquad C=1-3\cos(\omega Te)$

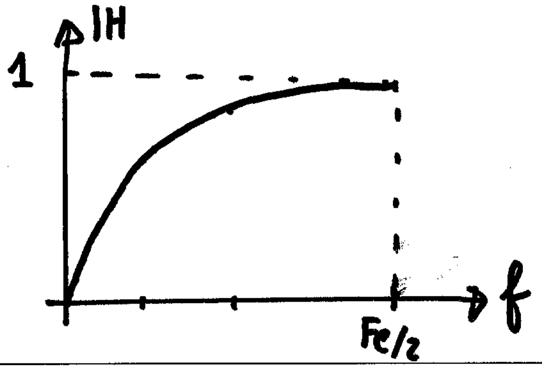
$B=2\sin(\omega Te)$ $\qquad D=3\sin(\omega Te)$

$$|H|=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{C^2+D^2}}$$

Q3 : Compléter le tableau suivant pour les fréquences indiquées.

Fréquence	$\cos(\omega.Te)$	$\sin(\omega.Te)$	A	B	C	D	$\lvert H(j\omega)\rvert$
0	1	0	0	0	-2	0	0
Fe/8	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$1-3/\sqrt{2}$	$3/\sqrt{2}$	0,64
Fe/4	0	1	2	2	1	3	0,89
Fe/2	-1	0	4	0	4	0	1

Q3 : Tracer l'allure de la réponse fréquentielle de ce filtre et indiquer la nature de ce filtre.



Filtre passe haut

Partie B : Synthèse d'un filtre passe haut du 1er ordre

On vous propose de réaliser un filtre passe haut du 1er ordre en utilisant son équivalent analogique et la transformée bilinéaire. Pour effectuer le calcul de la fonction de transfert en z on utilise la transformation bilinéaire suivante en posant : $\frac{p}{\omega c} = a \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ avec $a = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega c . Te}{2}\right)}$ afin d'obtenir une équivalence entre la fréquence de coupure analogique et numérique.

Q1 : Rappeler la fonction de transfert en p d'un filtre passe ~~bas~~ haut du 1er ordre et de pulsation de coupure ωc.

$$H(p) = \frac{p/\omega c}{1 + p/\omega c}$$

Q2 : En utilisant la transformée bilinéaire, exprimer la fonction de transfert en z et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme $H(z) = \frac{A + B.z^{-1}}{1 + C z^{-1}}$.

$$H(z) = \frac{a \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}{1 + a \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{a.(1 - z^{-1})}{1 + z^{-1} + a(1 - z^{-1})} = \frac{a - a z^{-1}}{1 + a + z^{-1}(1 - a)}$$

soit $H(z) = \frac{\frac{a}{1+a} - \frac{a}{1+a} . z^{-1}}{1 + z^{-1} . \frac{1-a}{1+a}}$ $\quad A = \frac{a}{1+a} \quad B = \frac{-a}{1+a}$

$C = \frac{1-a}{1+a}$

Q3 : On désire une fréquence de coupure fc de 100Hz pour une fréquence d'échantillonnage de 2kHz. En déduire les valeurs des coefficients a, b et c du filtre numérique.

A= 0,863	B= -0,863	C= -0,727

$$a = \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi fc}{2 Fe}\right)} = \frac{1}{\tan(\pi fc / Fe)} \qquad a = 6,314$$