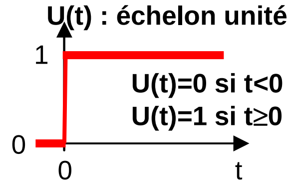
poujouly.net
@poujouly

Transformée de Laplace

Transformée de Laplace : Définition

La transformée de Lapace (TL) associe à une fonction f(t) une autre fonction F(p) de la variable complexe p=a+jb est définie par :

$$\boxed{TL\left[f(t).U(t)\right] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}dt}$$



(*) Sous réserve que l'intégrale converge

Pour la transformée de Laplace, la fonction f(t).U(t) est nulle pour t<0 ce qui implique que le temps t=0 correspond au début de l'étude.

Transformée de Laplace : Propriétés & Théorèmes

❑ **Linéarité de la transformée de Laplace :**

si $f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$ $\quad g(t) \xrightarrow{TL} G(p)$ alors $\quad a.f(t) \xrightarrow{TL} a.F(p) \quad a.f(t) + b.g(t) \xrightarrow{TL} a.F(p) + a.G(p)$ où a & b sont des constantes

Attention : Le produit de 2 fonctions f(t).g(t) n'admet pas pour transformée F(p).G(p) !

❑ **Dérivation : Une propriété fondamentale qui justifie l'utilisation de la TL !**

si $f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$ alors $\boxed{\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{TL} p.F(p) - f(0+)}$ ou f(0+) est la valeur initiale de f(t)

Remarque importante : Si les conditions initiales sont nulles (f(0+)=0 : Conditions de Heaviside), dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace !

❑ **Théorème de la valeur initiale :** $\lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p.F(p)$

❑ **Théorème de la valeur finale :** $\boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)}$

Le théorème de la valeur finale est très important pour calculer l'erreur statique dans les systèmes asservis.

❑ **Théorème du retard** $\quad f(t-\tau) \xrightarrow{TL} e^{-\tau p}.F(p)$

Table des transformée de Laplace usuelle

Cette table permet de trouver l'original d'une fonction F(p) sans effectuer de calcul ce qui est un des intérets de la transformée de Laplace.

f(t)	F(p)	f(t)	F(p)	f(t)	F(p)
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)U(t)$	$\frac{1}{(p+a)p}$	$\frac{1}{b}e^{-at}\sin(bt).U(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2+b^2}$
K.U(t)	$\frac{K}{p}$	$te^{-at}.U(t)$	$\left(\frac{1}{p+a}\right)^2$	$\frac{1}{(b-a)}\left(ae^{-at}-be^{-bt}\right).U(t)$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
K.t.U(t)	$\frac{K}{p^2}$	$(1-\omega t)e^{-\omega t}.U(t)$	$\frac{p}{(p+\omega)^2}$	$\frac{1}{(b-a)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right).U(t)$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$K.t^n.U(t)$	$\frac{K}{p^n}$	$\sin(\omega t).U(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin(\omega t).U(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\cos(\omega t).U(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos(\omega t).U(t)$	$\frac{(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}$