Physique & Contrôle des Systèmes

Asservissement des systèmes linéaires à temps continu

PCS S3 GE1

Chap 1 : Introduction aux SA & outils mathématiques

Plan de la présentation

1 Exemple et structure d'un **S**ystème **A**sservi – Qualités d'un asservissement

2 Le cas important des systèmes linéaires

3 Transformée de Laplace : Un outil indispensable pour l'étude des asservissements

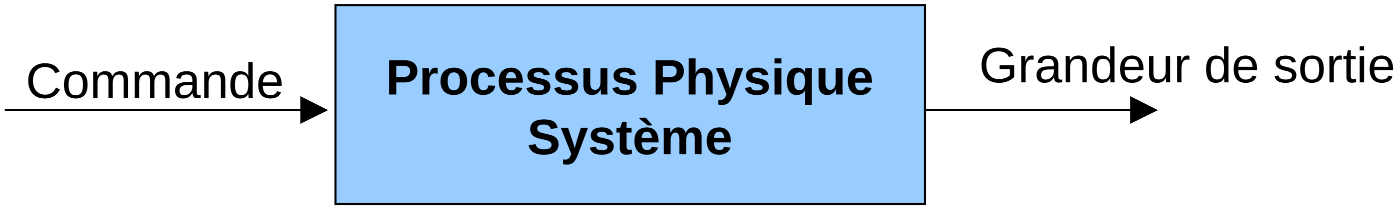
4 Système linéaire du 1er & 2nd ordre : réponse temporelle & harmonique

5 Retour sur la construction des diagrammes de Bode : Un outil essentiel !

6 Modélisation & représentation classique d'un asservissement

Stéphane POUJOULY http://poujouly.net
stephane.poujouly@u-psud.fr http://twitter.com/poujouly
IUT CACHAN Département Geii1 9 bd de la Div Leclerc 94230 CACHAN

1 Les systèmes asservis : Introduction



Système, processus : Dispositif réalisant une fonction dont la grandeur de sortie évolue de façon plus ou moins maitrisé par l'entrée de commande.
Exemple :

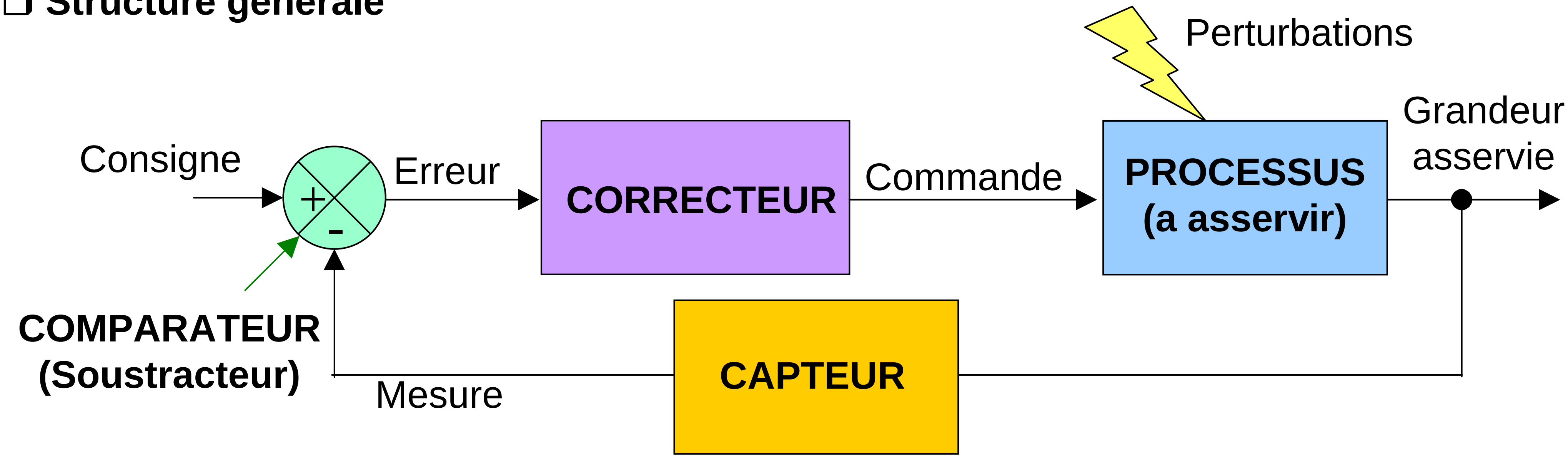
Sans information sur la grandeur de sortie, il n'y a **aucune certitude sur l'état de la sortie** par rapport à la grandeur de commande

On appelle alors un **système asservi**, un système dont la commande est réglé à partir des observations de la sortie et de la consigne préalablement fixée.

Un **système asservi** est donc un **système bouclé** possédant une rétro action de la sortie sur l'entrée.

1 Structure d’un système asservi

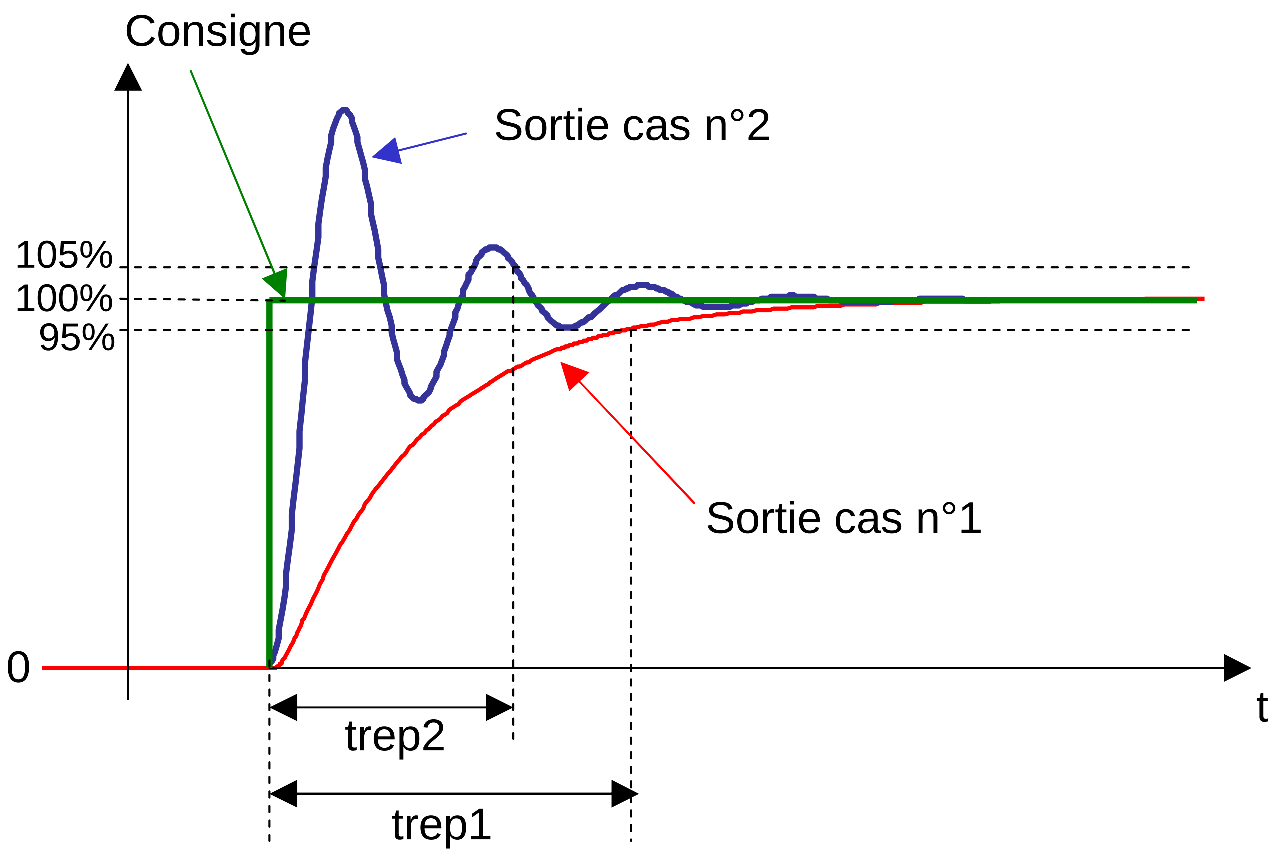
❒ Structure générale



❒ Exemples : Asservissement de vitesse, de position, de température….

1 Les qualités d’un asservissement : Rapidité

Rapidité : Il s’agit de la vitesse à laquelle répond le système vers son état stable lorsqu’il est soumis à une réponse indicielle. On caractérise son temps de réponse tr à 5%, c’est-à-dire le temps à partir duquel la sortie reste comprise entre 95% & 105% de la valeur finale.

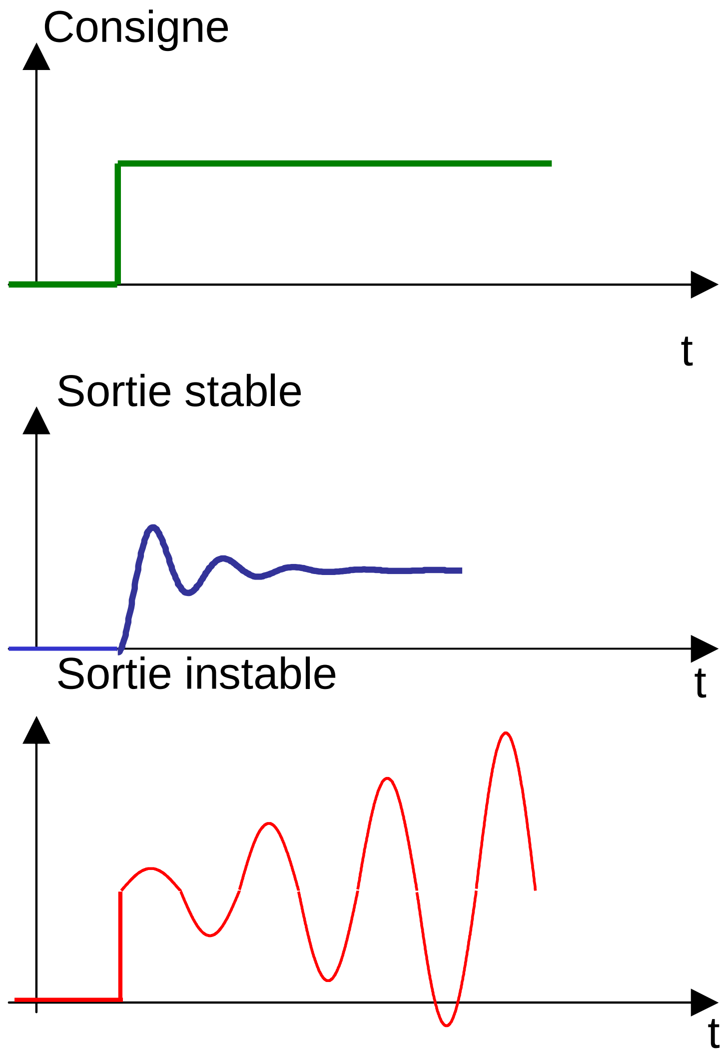


Les qualités d'un asservissement : Stabilité

Stabilité : Il s'agit de l'aptitude d'un système à évoluer vers une sortie constante (stable) lorsqu'on applique en entrée un échelon.

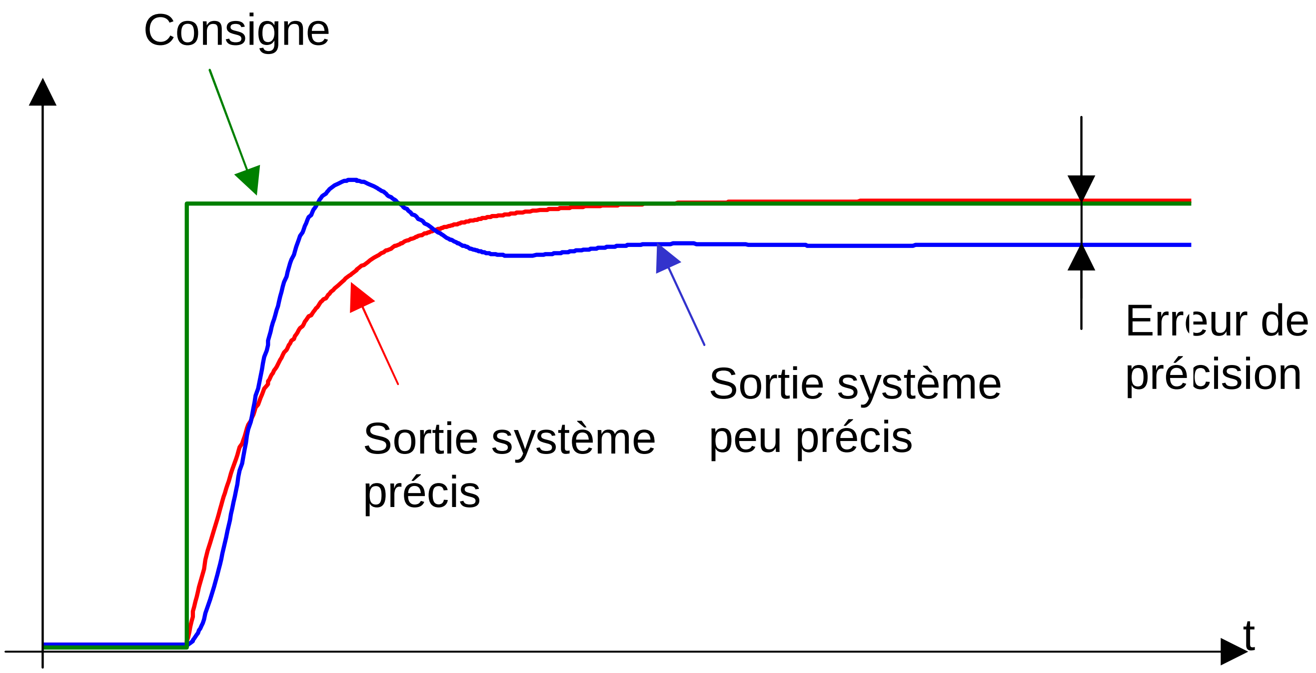
La stabilité des systèmes bouclés est un point essentiel dans l'étude des systèmes asservis (voir Chap1.2).

En électronique des télécoms (SEI), l'instabilité d'un système peut être mis à profit pour réaliser des oscillateurs. Dans le cadre du module PCS nous chercherons le plus souvent à rendre un système stable !



1 Les qualités d’un asservissement : Précision

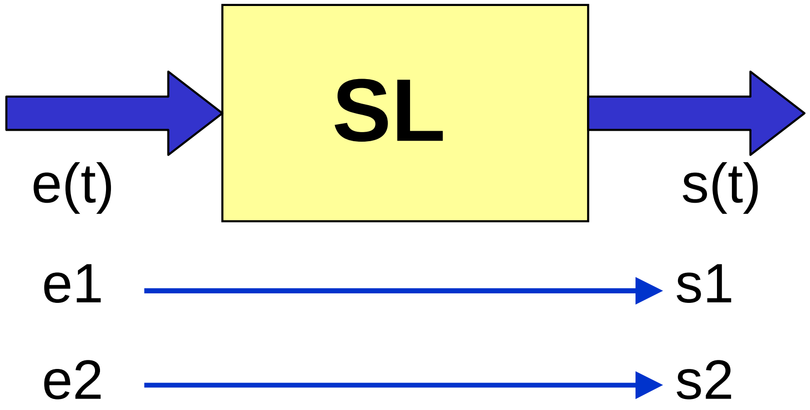
Précision : Il s’agit de la capacité d’un système à suivre les variations d’entrée en toute circonstances. On caractérise la précision par l’erreur qui existe (ou non) entre la sortie et la consigne.



Que représente un système linéaire ?

❒ **Contexte** : Dans le cadre du module PCS/S3 nous allons rencontrer de nombreux systèmes à asservir que l'on suppose linéaire.

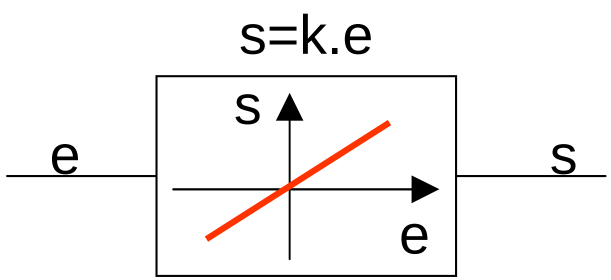
❒ **Définition** : Un système est dit linéaire s'il vérifie le principe de superposition

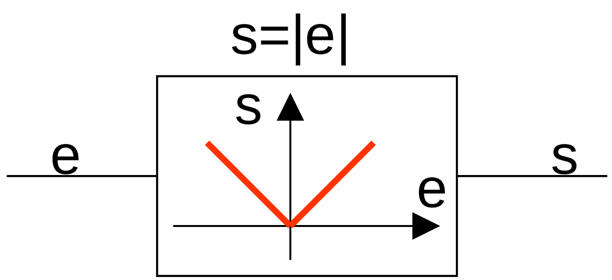


Lorsque $e(t) = \alpha.e1+\beta.e2$

S est linéaire ssi $s(t) = \alpha.s1+\beta.s2$

❒ **Exemple de systèmes linéaire/non linéaire**





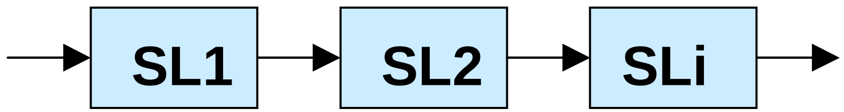
2 Propriétés des systèmes linéaires

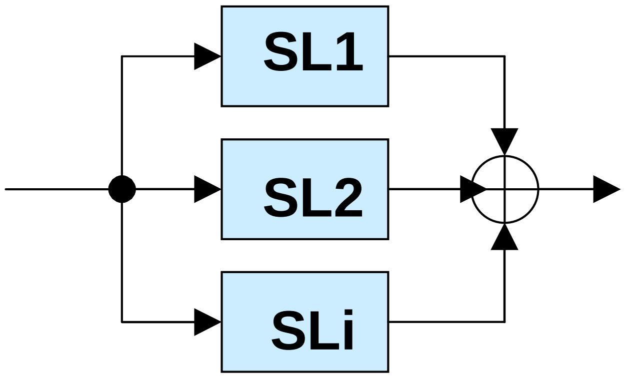
❒ **Propriété 1** : Si le système linéaire est stationnaire (c 'est à dire son comportement n 'évolue pas au cours du temps), alors on peut décrire ce système par une équation différentielle à coefficients constants entre l 'entrée et la sortie.

$$a_n.\frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1}.\frac{d^{n-1}s(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1.\frac{ds(t)}{dt} + a_0.s(t) = b_k.\frac{d^k e(t)}{dt^k} + b_{k-1}.\frac{d^{k-1}e(t)}{dt^{k-1}} + ... + b_1.\frac{de(t)}{dt} + b_0.e(t)$$

L 'ordre du système correspond alors à l 'ordre n ($n \geq k$) de l 'équation différentielle.

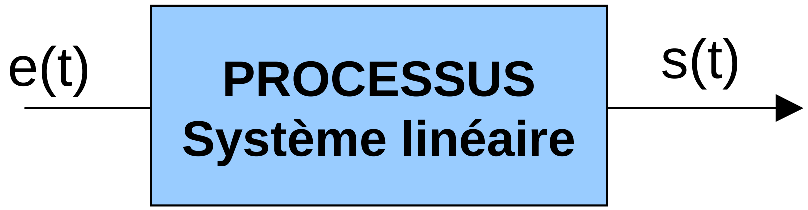
❒ **Propriété 2** : L 'association de systèmes linéaires est un système linéaire





3 Transformée de Laplace : Un outil indispensable

❒ **Etude de la réponse temporelle d'un système linéaire**



⇒ **Résolution d'équation différentielle**

❒ **La transformée de Laplace est un outil permettant de résoudre les équations diff**

1 - Description physique d'un système : équation différentielle

2- Application de la transformée de Laplace

$$\boxed{\frac{d(.)}{dt} \Leftrightarrow (.)\times p \Leftrightarrow (.)\times j\omega}$$

p : variable de Laplace

3- Décomposition en forme type

4- Solution du système par transformation de Laplace inverse (tableau)

3 Transformée de Laplace : Les fondamentaux

❒ Définition

$$s(t) \xrightarrow{TL} S(p)$$

$$S(p) = \int_0^\infty e^{-pt} s(t)dt$$

p : variable de Laplace complexe p=a+jb

(Intégrale sous réserve de convergence)

❒ Théorème de la valeur finale

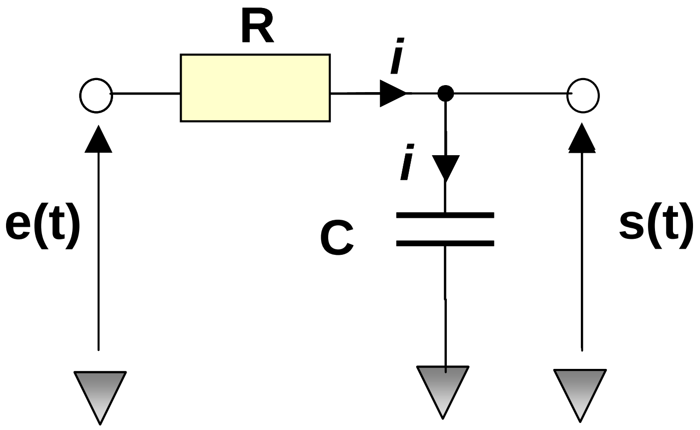
$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p.S(p)$$

❒ Table des transformées de Laplace usuelle

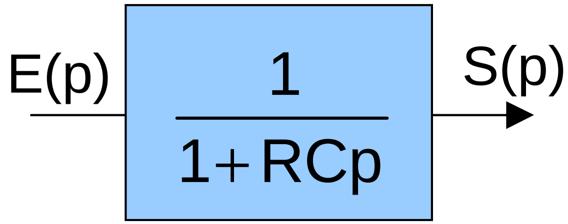
f(t)u(t)	F(p)	f(t)u(t)	F(p)
$\delta(t)$	1	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
K	$\dfrac{K}{p}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
Kt	$\dfrac{K}{p^2}$	$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\dfrac{1}{p(1+\tau p)}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$		

3 Transformée de Laplace : Exemple électrique

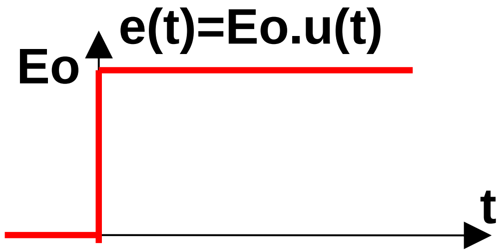
❒ Traduction du système linéaire sous la forme d'une fonction de transfert



$$\begin{cases} e(t) = R.i(t) + s(t) \\ i(t) = C \cdot \dfrac{ds(t)}{dt} \\ e(t) = RC.\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) \end{cases}$$

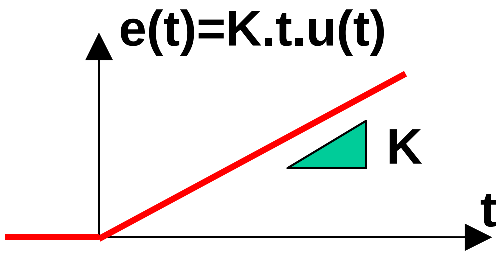


❒ Résolution du système en présence d'un échelon en entrée



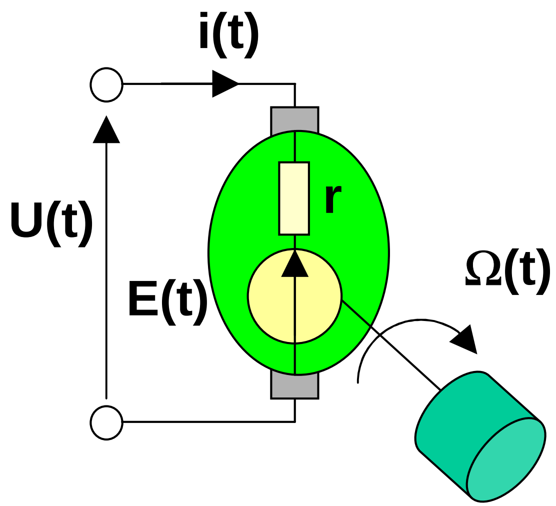
u(t) : fonction échelon
u(t)=1 pour t>0
u(t)=0 pour t<0

❒ Résolution du système en présence d'une rampe en entrée



Transformée de Laplace : Exemple électromécanique

❒ Moteur à courant continu + Charge



Hyp : inductance de l'induit négligeable

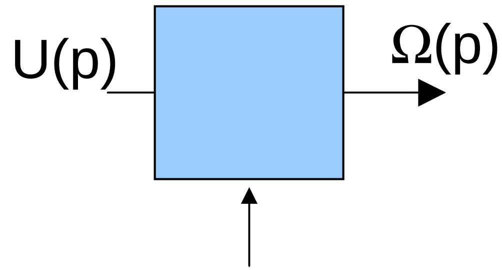
Equation électrique $U(t) = r.i(t) + E(t)$

Equations électromécanique $E(t) = k.\Omega(t)$ $\quad Cem(t) = k.i(t)$

Equation mécanique $J\dfrac{d\Omega(t)}{dt} = Cem(t) - f.\Omega(t)$

Cem : Couple électromécanique

f : Coefficient de frottements visqueux



Modélisation

Identification

4 Les systèmes linéaires : les formes canoniques passe bas

❒ **Cas très fréquent**

❒ **1er ordre passe bas**

$$T(p) = \frac{1}{1+\tau.p} = \frac{1}{1+\dfrac{p}{\omega c}}$$

τ

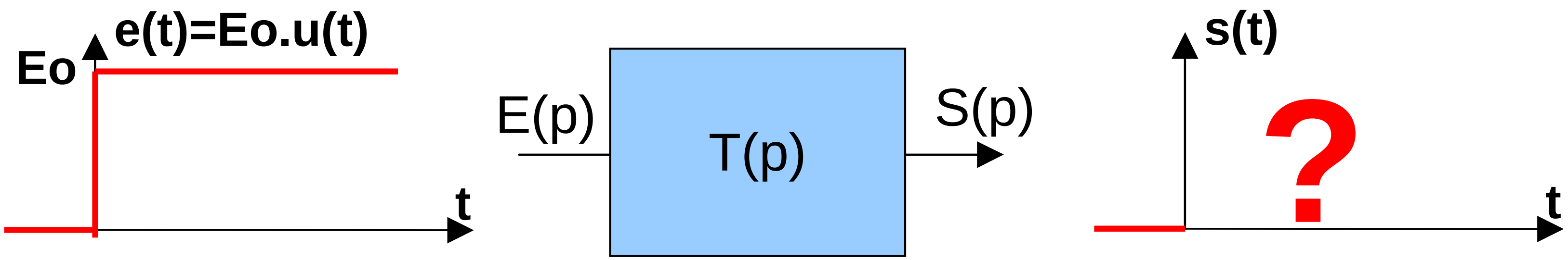
ωc

❒ **2nd ordre passe bas**

$$T(p) = \frac{1}{1+2m\cdot\dfrac{p}{\omega o}+\dfrac{p^2}{\omega o^2}}$$

m

ωo



Retour sur les systèmes linéaires du 1er ordre passe bas

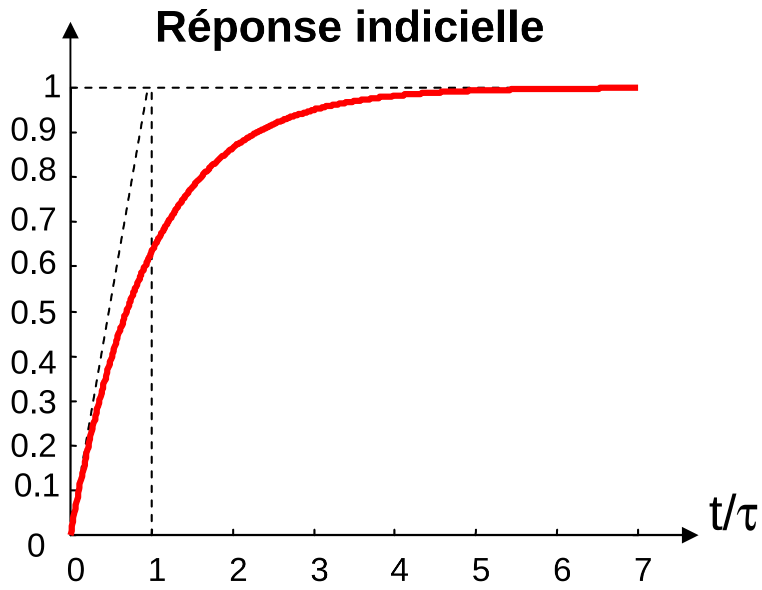
Pour un système du premier ordre soumis à une entrée échelon la réponse est de la forme générale

$$s(t) = \left(s(0+) - s(\infty)\right).\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + s(\infty)$$

s(0+) représente la valeur prise par la sortie juste après la variation de l 'entrée

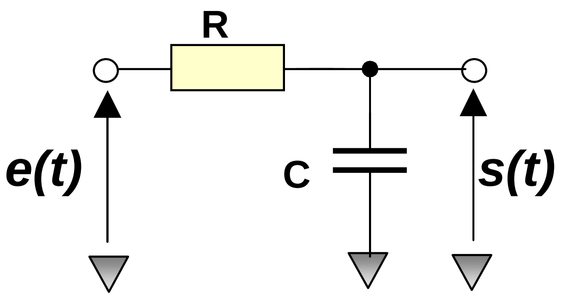
s(∞) représente la valeur prise par la sortie en régime asymptotique

τ est la constante de temps du système



$$tr_{10\% - 90\%} = 2{,}2\tau = \frac{0{,}35}{fc} \qquad ts_{5\%} = 3.\tau \qquad tp = 0{,}7\tau$$

Exemple : circuit RC



$$e(t) = \tau.\frac{ds(t)}{st} + s(t) \qquad \tau = RC$$

Si e(t) est un échelon d 'amplitude 1V

Alors $$s(t) = 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

4 Retour sur les systèmes linéaires du 2nd ordre passe bas

- **Équation caractéristique d'un 2nd ordre :** $$\frac{1}{\omega o^2}\cdot p^2+\frac{2m}{\omega o}\cdot p+1=0$$

- **Calcul du discriminant :** $$\Delta=\frac{4}{\omega o^2}\cdot\left(m^2-1\right)$$

$$\begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow m>1 \ : \ \text{2 racines réelles} & p_{1,2}=-m\omega o\pm\omega o\cdot\sqrt{m^2-1} \\ \Delta<0 \Rightarrow m<1 \ : \ \text{2 racines complexes conjuguées} & p_{1,2}=-m\omega o\pm j\omega o\cdot\sqrt{1-m^2} \\ \Delta=0 \Rightarrow m=1 \ : \ \text{1 racine double} & p_0=-\omega o \end{cases}$$

- **Réécriture de la fonction de transfert :**

m>1

$$T(p)=\frac{1}{\left(1+\frac{p}{\omega 1}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{\omega 2}\right)}$$

m=1

$$T(j\omega)=\frac{1}{\left(1+\frac{p}{\omega o}\right)^2}$$

m<1

$$T(j\omega)=\frac{1}{1+2m\frac{p}{\omega o}+\frac{p^2}{\omega o^2}}$$

4 Expression des réponses indicielles pour m>0

- m>1 : Régime apériodique

$$s(t) = 1 + \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \cdot \left(\omega_2 \exp(-\omega_1 . t) - \omega_1 \exp(-\omega_2 . t)\right)$$

$$\omega_1 = \omega_0 \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \qquad \omega_2 = \omega_0 \left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)$$

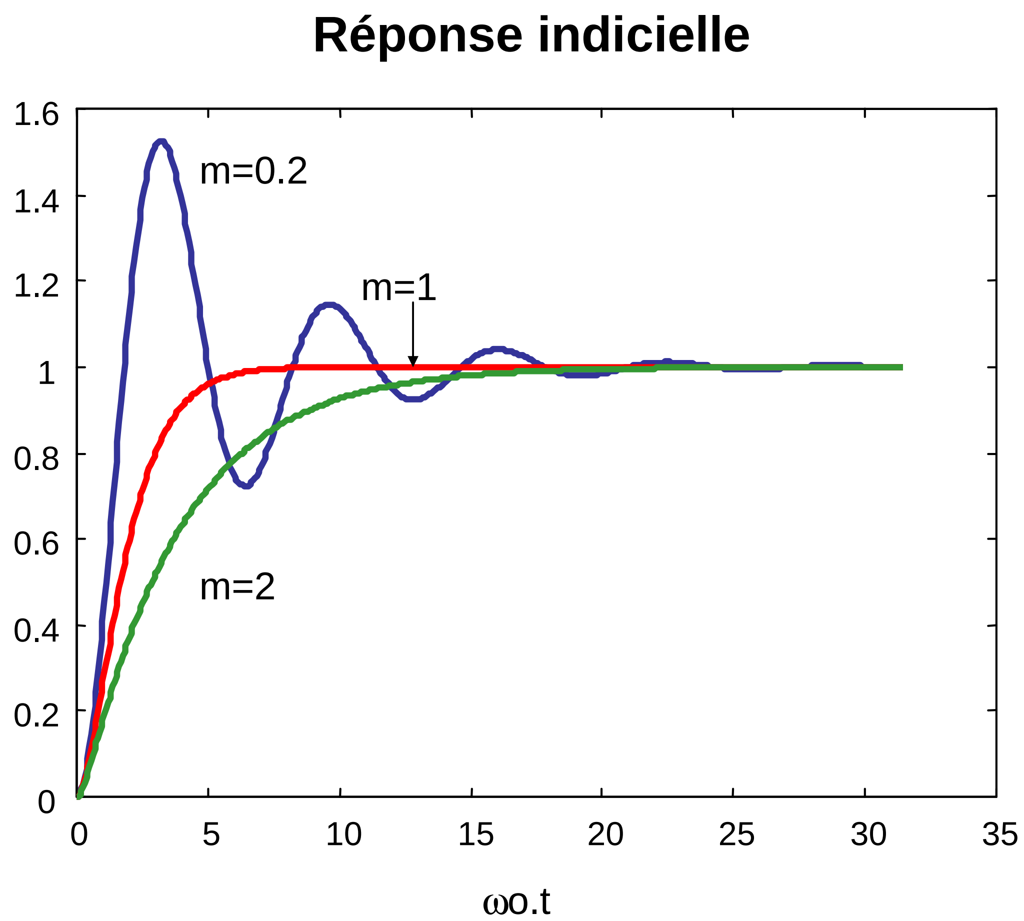
- m=1 : Régime critique

$$s(t) = 1 - (1 + \omega_0 . t) \cdot \exp(-\omega_0 . t)$$

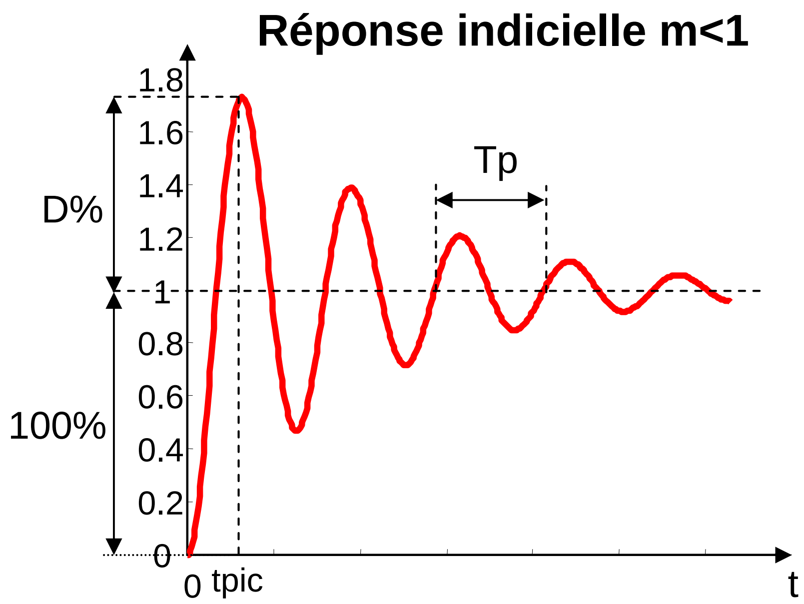
- m<1 : Régime pseudo-périodique

$$s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot e^{-m \omega_0 . t} \cdot \sin(\omega_p . t + \varphi)$$

$$\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2} \qquad \varphi = \arccos(m)$$

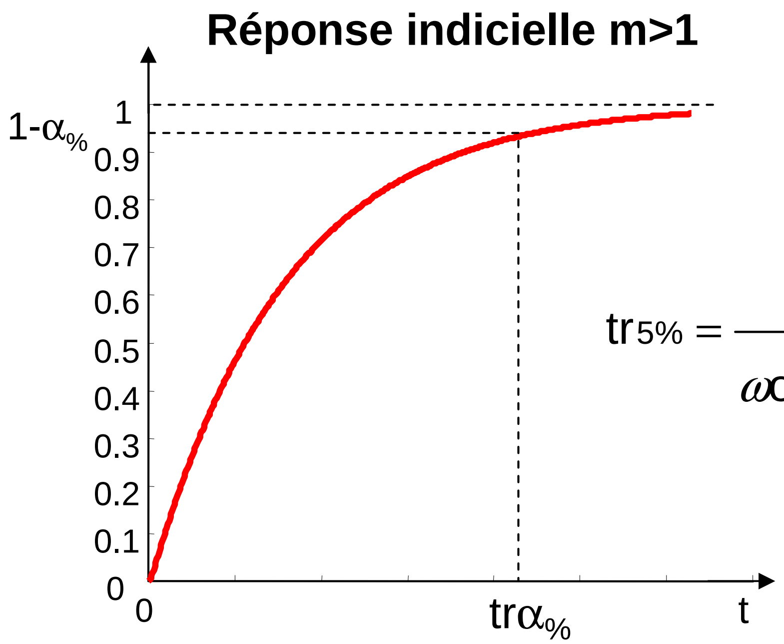


4 Caractérisation de la réponse indicielle



$$\omega p = \frac{2\pi}{Tp} \qquad tpic = \frac{Tp}{2} = \frac{\pi}{\omega o \cdot \sqrt{1-m^2}}$$

$$D\% = 100.\exp\left(\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right) \qquad \frac{Dn}{D_{n+1}} = \exp\left(\frac{2m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$



$$tr_{5\%} = \frac{3}{\omega o \cdot \left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)}$$

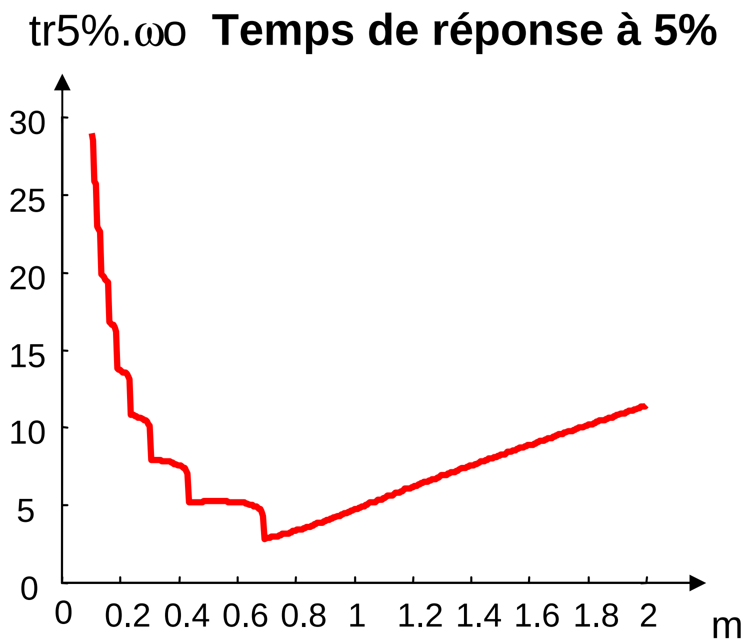
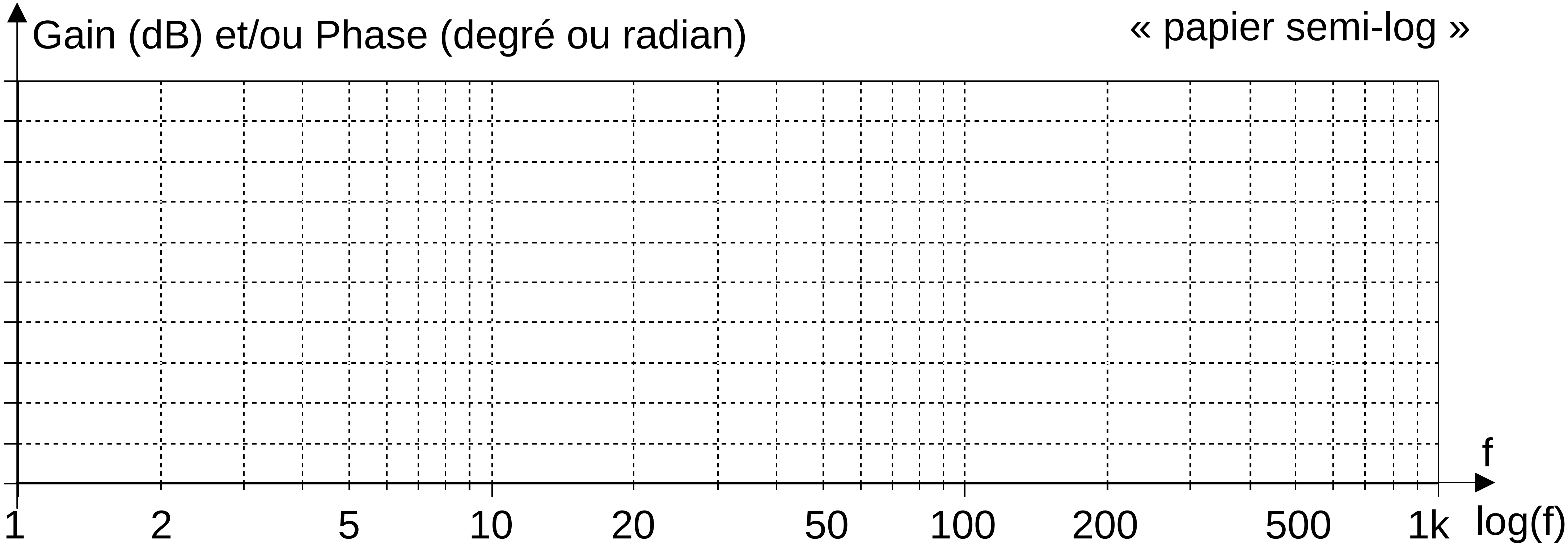


Diagramme de Bode : Principe

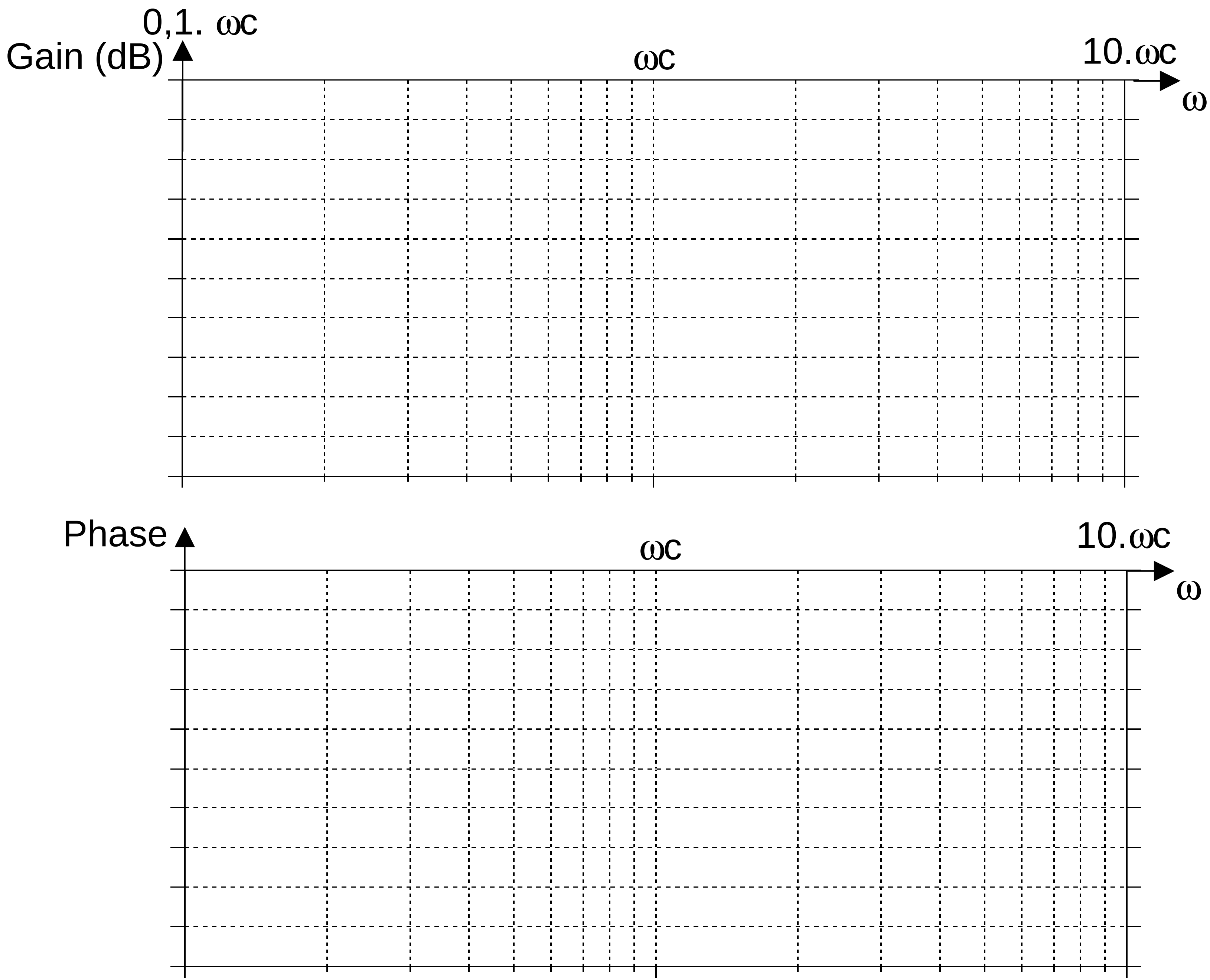
Principe : Il s'agit d'une représentation très utilisée en électronique permettant de tracer le gain (dB) et l'argument (ou phase) d'une fonction de transfert en fonction de la fréquence. Pour l'axe de la fréquence on choisit une échelle logarithmique permettant d'obtenir une représentation compacte pour une grande dynamique.



Hendrik Wade Bode
(24/12/1905- 22/06/1982)
ingénieur, chercheur et inventeur américain d'origine néerlandaise.

5 Diagramme de Bode : Tracé asymptotique & réel

$$T(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{\omega c}}$$



5 Diagramme de Bode : Intérêt majeur

❑ Le diagramme de Bode permet de fournir une indication sur la réponse fréquentielle d'un filtre pour une très grande dynamique.

❑ L'intérêt majeur réside dans sa construction : Une fonction de transfert se décompose traditionnellement en produit de fonction de transfert élémentaires (ou canoniques). Le tracé du diagramme de Bode est alors obtenu en effectuant une somme graphique de chaque gain et chaque phase (ou argument) des fonctions de transferts élémentaires composant la fonction de transfert du système étudié.

Exemple : Fonction de transfert sous la forme d'un produit de fonction de transfert élémentaire

$$T(p) = T_1(p) \cdot T_2(p) \cdot T_3(p)$$

Calcul du gain :

$$\begin{cases} |T(j\omega)| = |T_1(j\omega)| \cdot |T_2(j\omega)| \cdot |T_3(j\omega)| \\ G_{dB} = 20 \cdot \log(|T(j\omega)|) = 20 \cdot \log(|T_1(j\omega)|) + 20 \cdot \log(|T_2(j\omega)|) + 20 \cdot \log(|T_3(j\omega)|) \end{cases}$$

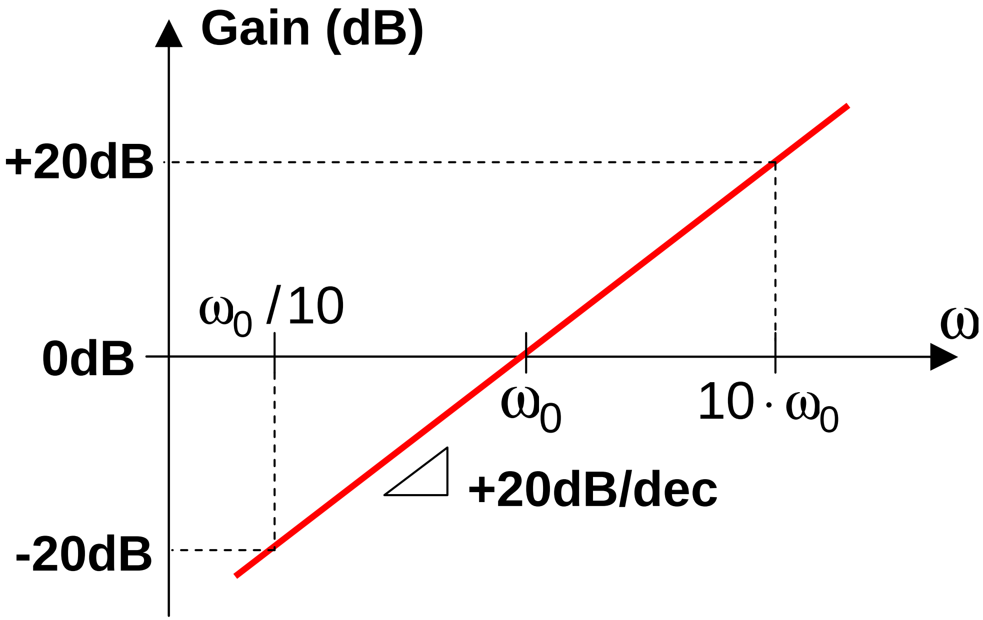
$$\left.\begin{aligned} G_{dB} &= G_{1dB} + G_{2dB} + G_{3dB} \\ \mathrm{Arg}(T(j\omega)) &= \mathrm{Arg}(T_1(j\omega)) + \mathrm{Arg}(T_2(j\omega)) + \mathrm{Arg}(T_3(j\omega)) \end{aligned}\right\}$$

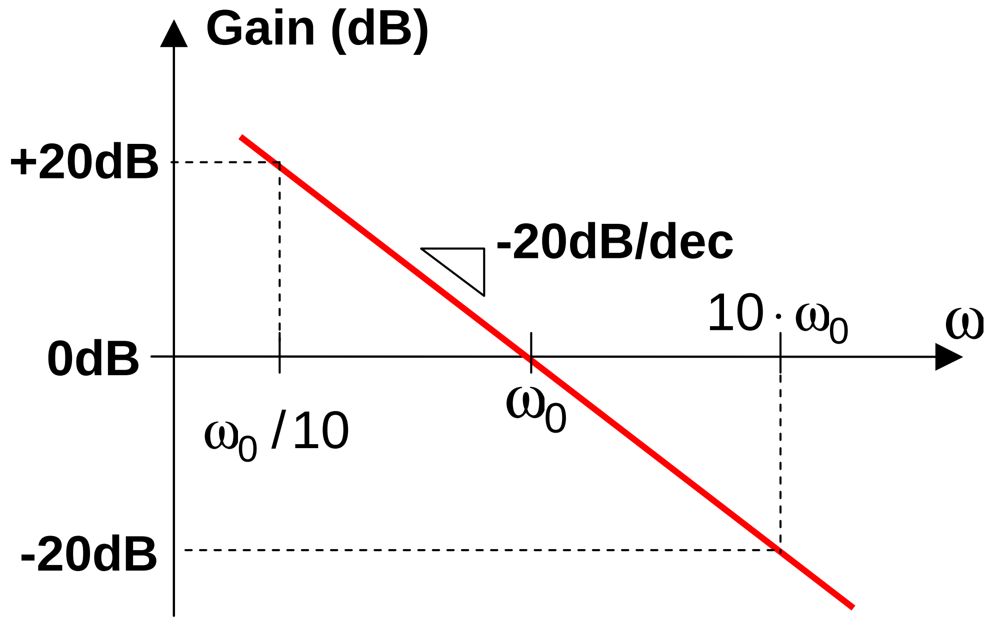
Tracé diag. de Bode total = Somme graphique de chaque diag. de Bode élémentaire

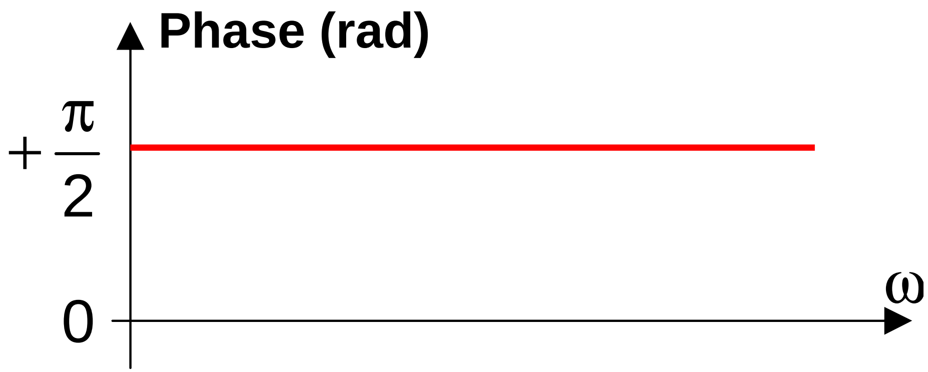
5 Diagramme de Bode : Formes canoniques 1

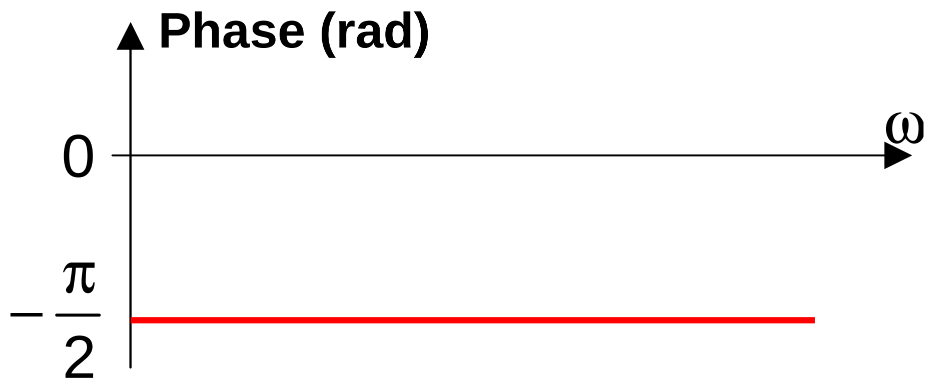
$$T(p) = \frac{p}{\omega_0}$$ ➜ **Dérivateur Pur**

$$T(p) = \frac{1}{\frac{p}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{p}$$ ➜ **Intégrateur Pur**









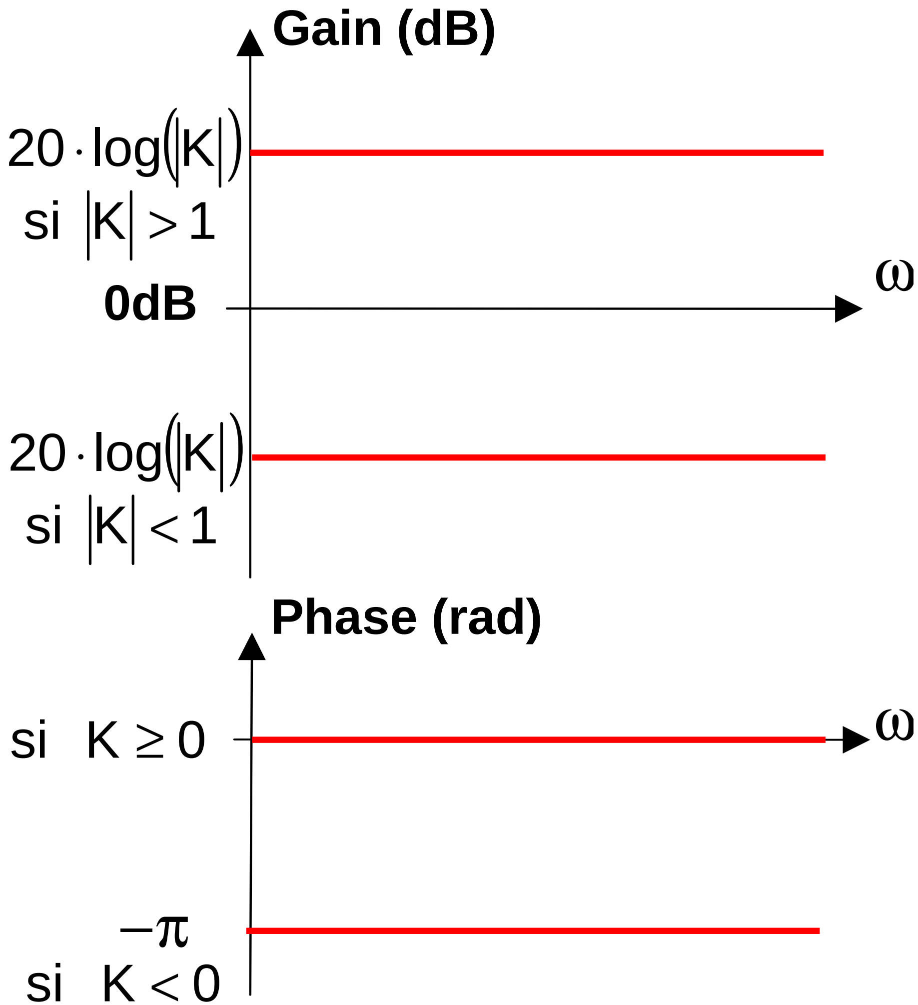
5 Diagramme de Bode : Formes canoniques 2

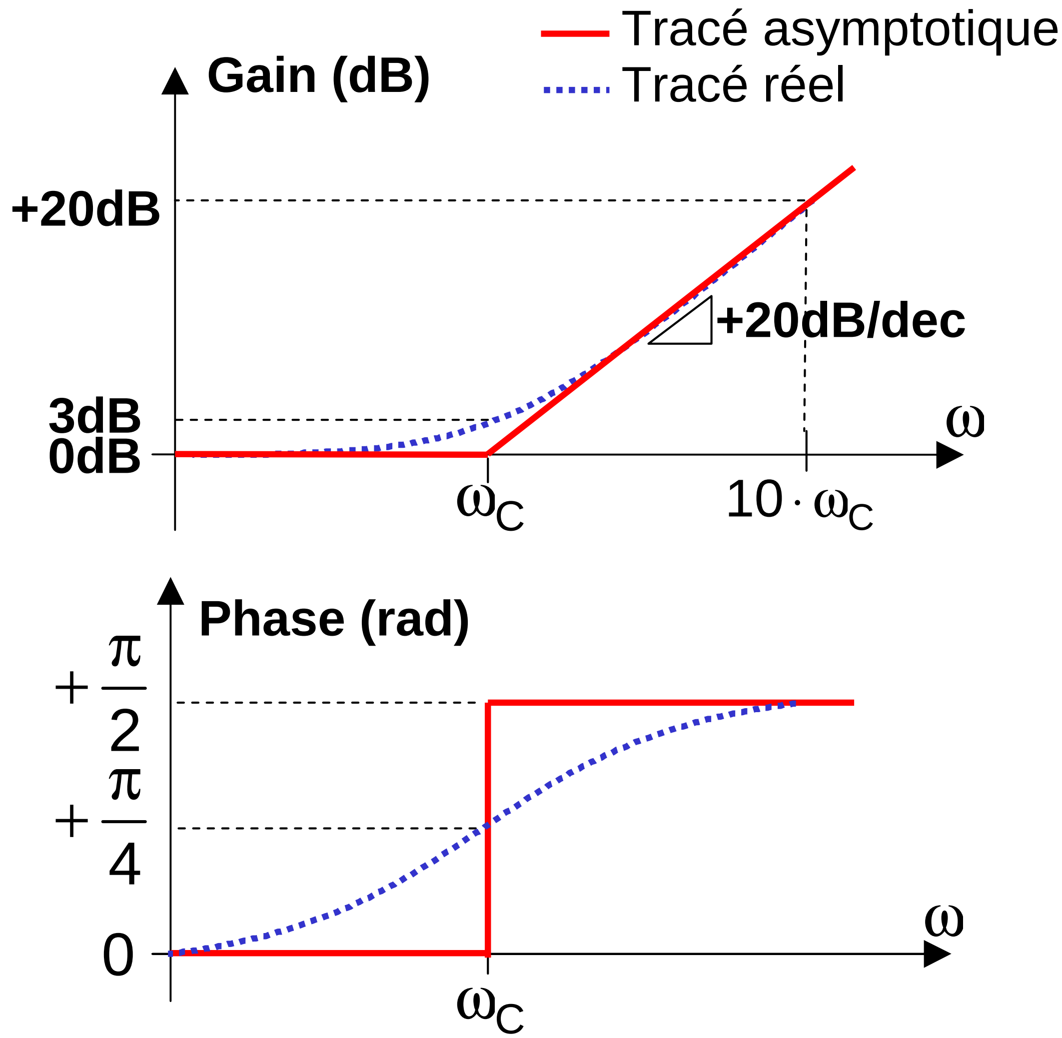
$$T(p) = K$$

Action proportionnelle

$$T(p) = 1 + \frac{p}{\omega_C}$$

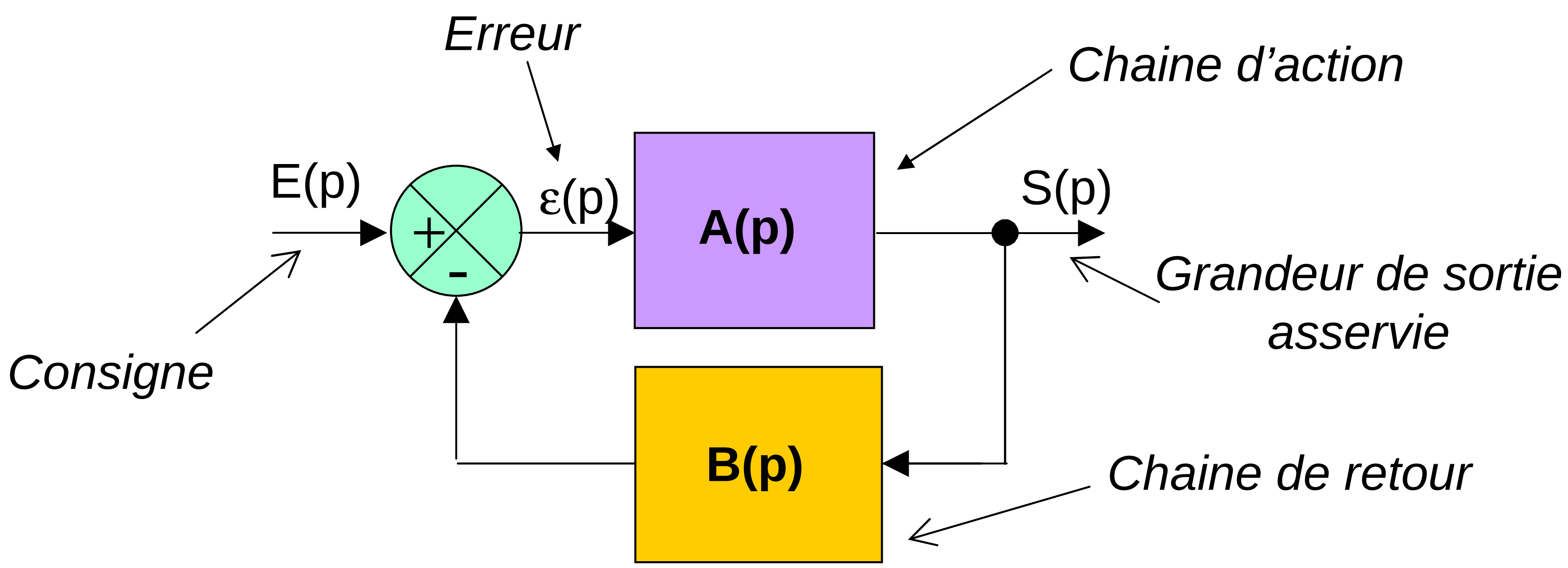
Proportionnel Dérivé





6 Fonction de transfert en BF / en BO

❒ Modélisation classique d'un asservissement



❒ FTBF : Fonction de Transfert en Boucle Fermée

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

❒ FTBO : Fonction de Transfert en Boucle Ouverte

$$FTBO(p) = A(p).B(p)$$