Identification, Stabilité & Correction des systèmes asservis

Eléments de correction

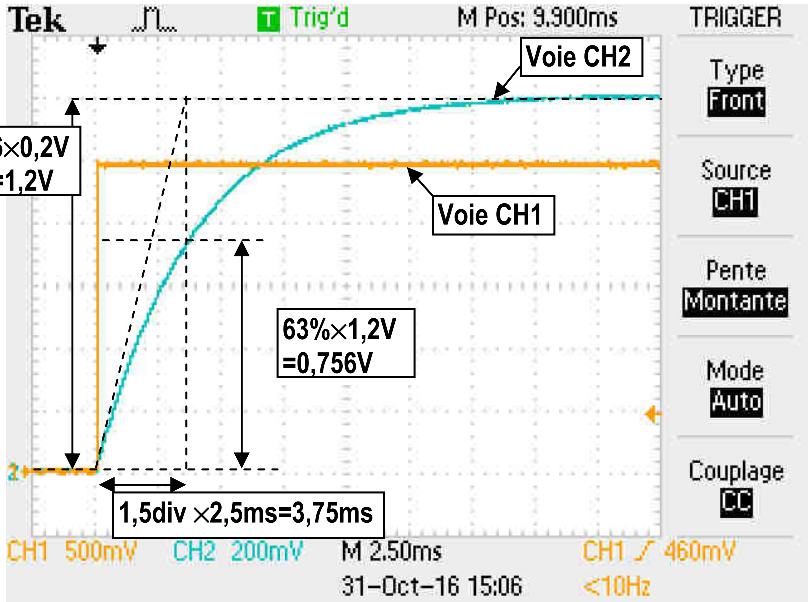
Exercice n°1 : Identification d'un système physique

Q1 : Il s'agit d'une réponse indicielle

Q2 : Ce système a un comportement de type passe bas car au bout d'un certain temps on retrouve une tension continue en sortie lorsque l'entrée est continue.

Q3 : C'est la tangente à l'origine de la réponse indicielle qui permet de montrer qu'il s'agit d'un 1er ordre. Si la tangente est horizontale alors l'ordre est supérieur à 1. En se plaçant à 63% on en déduit une constante de temps τ=3,75ms comme le montre la figure ci-contre

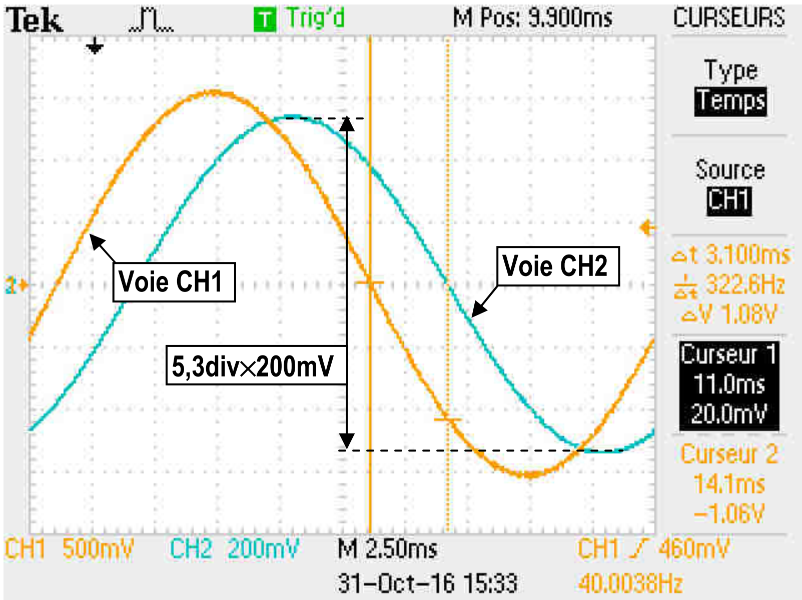
Q4 : La valeur de K est obtenue en effectuant le rapport entre la sortie et l'entrée sur les valeurs finales soit : K=(6×0,2V)/(5×0,5V)=0,48



Q5 : $H(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}$

Q6 : Une période de 1/40=25ms correspond à un déphasage de 360°
Donc un écart de 3,1ms correspond à un déphasage de -44,64 soit quasiment -45° car la voie CH2 est en retard sur la voie CH1.

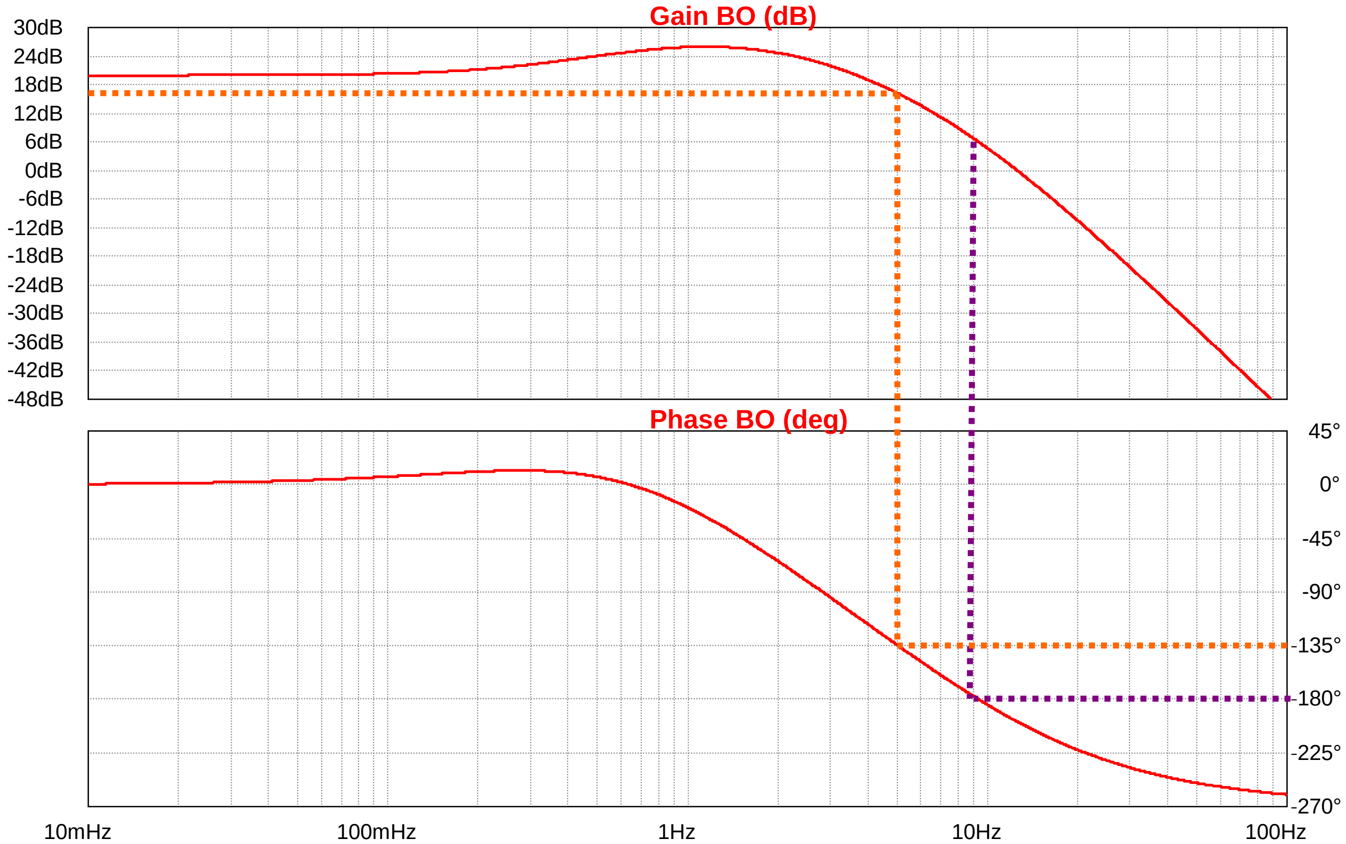
Q7 : Comme le déphasage est à peu prés -45° cela signifie que l'on se trouve au voisinage de la fréquence de coupure qui est $fc=\dfrac{1}{2\pi\tau}=42{,}4Hz$ ce qui correspond bien à l'essai précédent.



Q8 : Pour la fréquence de coupure le module du filtre est $\dfrac{K}{\sqrt{2}}=0{,}34$

Comme l'amplitude en entrée est de 3Vpp (ce qui est affichée sur l'écran) on obtient en sortie 1,06V ce qui correspond à un module de 0,35 proche de la valeur théorique.

Exercice n°2 : Discussion autour d'un diagramme de Bode en Boucle ouverte



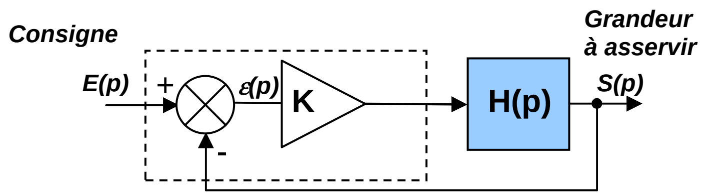
Q1 : On se place à la fréquence pour laquelle la phase passe par -180° et l'on constate que le gain passe par 6dB donc >0dB : Le système est donc **INSTABLE**

Q2 : Il faut donc abaisser de 6dB le gain pour que le système soit stable donc $K\,limite = 10^{-\frac{6}{20}} \times 10 = 5$ Si K<5 alors le système est stable.

Q3 : On se place à la fréquence pour laquelle la phase passe par -135° et l'on constate que le gain passe par 16dB. Il faut donc amener ce gain à 0dB soit $K_{M\varphi 45°} = 10^{-\frac{16}{20}} \times 10 \approx 1{,}6$

Exercice n°3 : Une histoire de stabilité et d'un tracé de diagramme de Bode

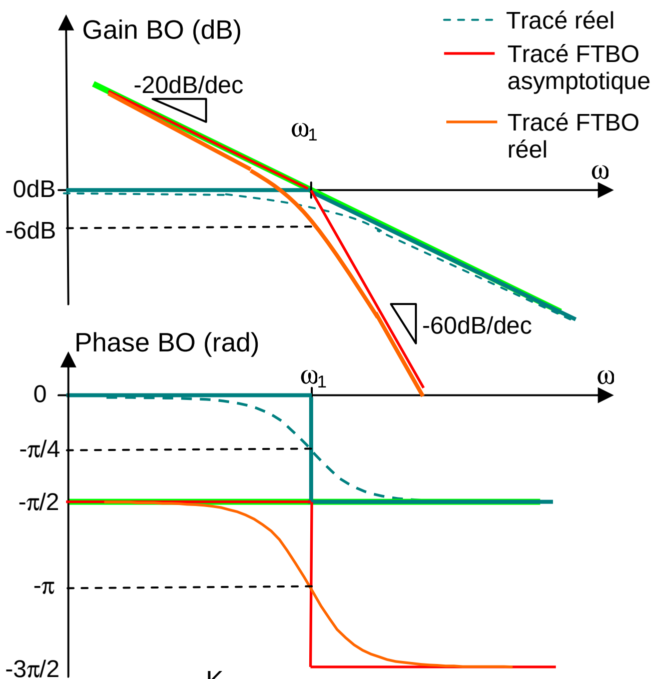
Q1 :



Q2 : $\text{FTBO}(p) = K.H(p) = \dfrac{K}{\dfrac{p}{\omega_1}\cdot\left(1+\dfrac{p}{\omega_1}\right)^2}$

Q3 : Diagramme de Bode de la FTBO pour K=1

Pour K=1, la fonction de transfert peut se décomposer comme suit : $\text{FTBO}(p) = \dfrac{1}{\dfrac{p}{\omega_1}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{p}{\omega_1}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{p}{\omega_1}}$



Pour K=1 on remarque que le gain en BO est de -6dB quand la phase passe par $-\pi$. Le système est donc stable.
Si le gain K=10 alors le gain augmente de 20dB sans que la phase ne change. Lorsque la phase passe par $-\pi$ on obtient donc un gain de -6dB+20dB=14dB >0dB donc le système devient instable.

Q4 : $\text{Arg(FTBO)} = -\dfrac{\pi}{2} - 2.\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)$

Recherche la pulsation ω_T telle que

$\text{Arg(FTBO)}_{\omega=\omega_T} = -\dfrac{3\pi}{4}$ revient à résoudre

$-\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} - 2.\arctan\left(\dfrac{\omega_T}{\omega_1}\right)$ soit

$2.\arctan\left(\dfrac{\omega_T}{\omega_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Donc $\omega_T = \omega_1.\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0{,}414.\omega_1$

comme $|\text{FTBO}| = \dfrac{K}{\dfrac{\omega}{\omega_1}\cdot\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\right)^2}$ alors $|\text{FTBO}|_{\omega=\omega_T} = 1$ revient à résoudre $\dfrac{K}{\dfrac{\omega_T}{\omega_1}\cdot\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_T}{\omega_1}\right)^2}\right)^2} = 1$ soit

$K = \tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\cdot\left(1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right) = 0{,}485$ Dans ces conditions quelle la marge de phase du système est de $\pi/4$ soit 45°

Exercice n°4 : Un pole à partie réelle positive ?

Q1 : $\varepsilon = E\cdot\dfrac{R2}{R1+R2} + S\cdot\dfrac{R1}{R1+R2}$

Q2 : $\varepsilon = E\cdot H1 - S\cdot H2$ donc par identification $H1 = \dfrac{R2}{R1+R2}$ et $H2 = -\dfrac{R1}{R1+R2}$

Q3 : On suppose que R1=R2 donc H1=1/2 et H2=-1/2

comme $T(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = H1\cdot\dfrac{A(p)}{1+A(p).H2}$ alors $T(p) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{Ao}{1+\dfrac{p}{\omega o}}}{1-\dfrac{Ao/2}{1+\dfrac{p}{\omega o}}}$ donc $T(p) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{Ao}{1+\dfrac{p}{\omega o}-\dfrac{Ao}{2}}$

que l'on peut écrire $T(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{Ao\cdot\omega o}{p-\omega o\left(\frac{Ao}{2}-1\right)}$ de la forme $T(p)=\frac{G}{p-po}$ avec $G=\frac{Ao\cdot\omega o}{2}$ et $po=\omega o\left(\frac{Ao}{2}-1\right)$

Q4 : po est le pole de la fonction de transfert T(p). On remarque que le pole po est réel et positif.

Q5 : Un système linéaire bouclé est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) sont à partie réelle strictement négative
Dans notre montage comme le pole est réel et positif alors le système est INSTABLE ce qui est parfaitement logique puisque le montage proposé est un comparateur de tension à hystérésis qui ne permet pas un fonctionnement de l'ampli-op en régime linéaire.

Exercice n°5 : Un oscillateur ou un système asservi volontairement instable ?

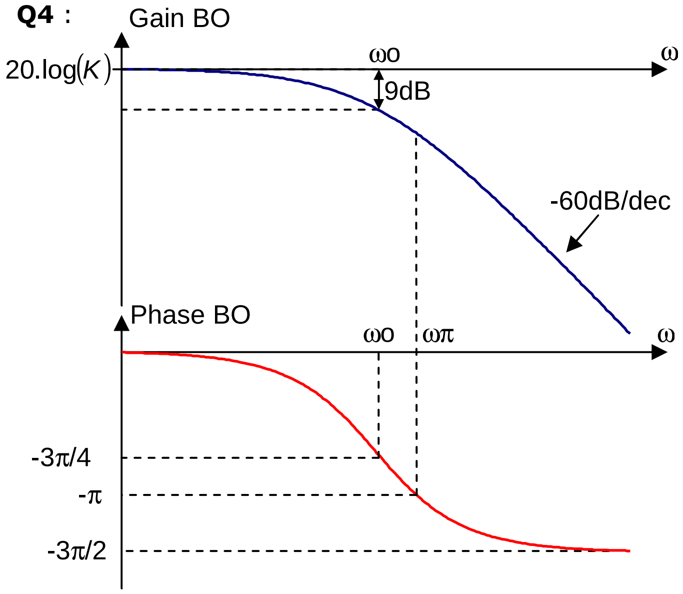
Q1 : Un montage amplificateur non inverseur dont le schéma est le suivant :

Q2 : On reconnait une structure de type inverseur donc :
$\frac{S1(p)}{S2(p)}=-\frac{Zeq}{Ro}$ avec $Zeq=\frac{2R}{1+2RCp}$ donc $\frac{S1(p)}{S2(p)}=-\frac{2R}{Ro}\cdot\frac{1}{1+2RCp}$
En prenant en considération le soustracteur dans le schéma bloc
il est possible d'écrire $H1(p)=\frac{2R}{Ro}\cdot\frac{1}{1+2RCp}$

Q3 : $FTBO(p)=H1(p).H2(p)=\frac{2R}{Ro}\cdot\frac{1}{1+2RCp}\cdot\frac{2}{1+4RCp+4(RCp)^2}=\frac{4R}{Ro}\cdot\frac{1}{(1+2RCp)^3}$ de la forme indiquée

avec $K=\frac{4R}{Ro}$ et $\omega o=\frac{1}{2RC}$

Q4 :



Q5 : $Arg(FTBO)=-3.\arctan\left(\frac{\omega}{\omega o}\right)$

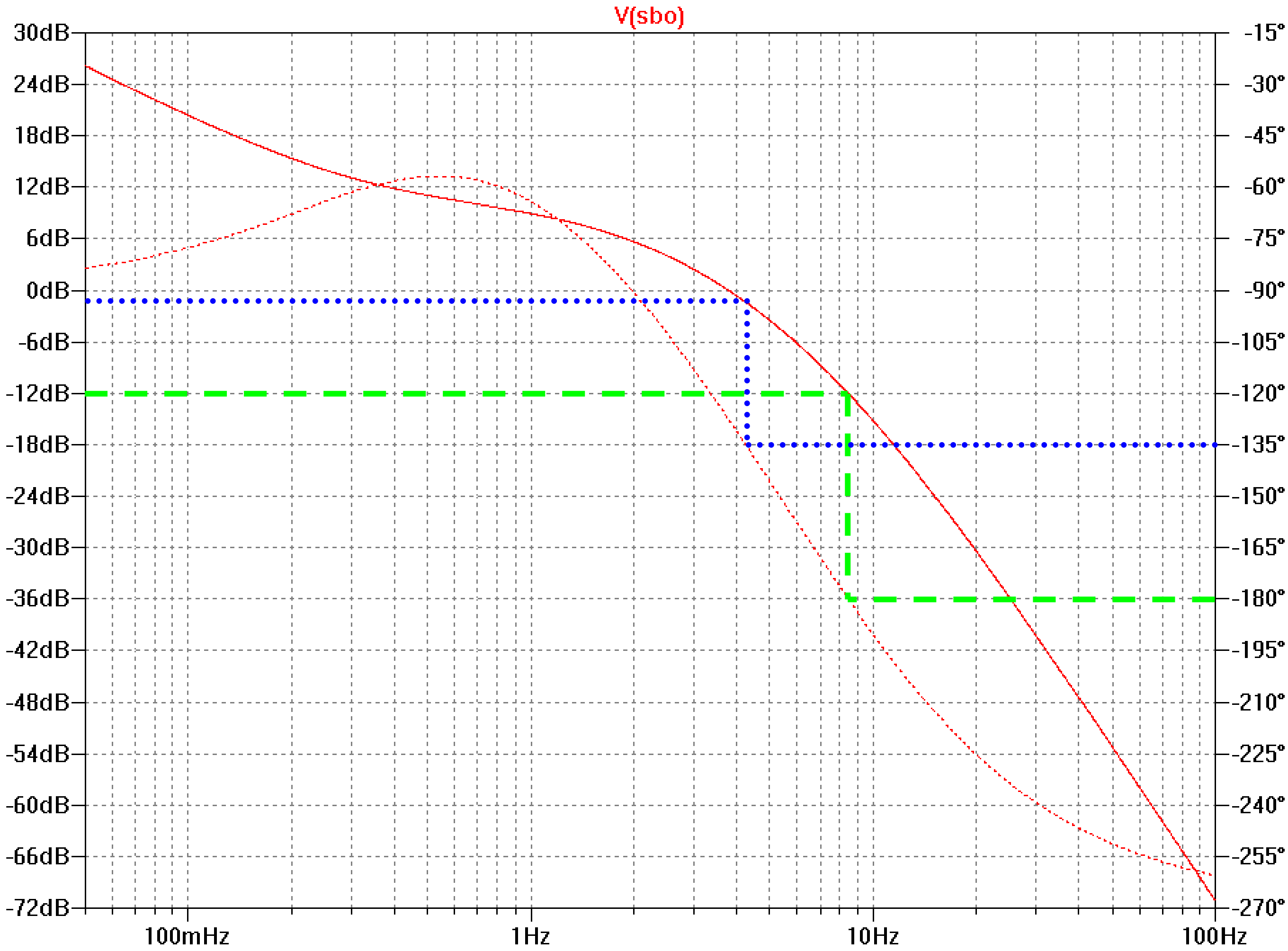
$-\pi=-3.\arctan\left(\frac{\omega\pi}{\omega o}\right)$ donc $\omega\pi=\omega o.\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ soit

$\boxed{\omega\pi=\omega o.\sqrt{3}}$

Le système est instable si |FTBO(ωπ)|>1 soit

$\frac{K}{\left(\sqrt{\left(1+\left(\frac{\omega o.\sqrt{3}}{\omega o}\right)^2\right)}\right)^3}>1$ soit $K>8$

Exercice n°6 : Discussion autour d'un diagramme de Bode en Boucle ouverte



Q1 : Pour la valeur K=2 on voit que pour -180° le gain est de -12dB donc <0dB ce qui signifie que le système est stable.

Q2 : Pour que le système soit instable il faut remonter le gain de 12dB soit une amplification de 4 supplémentaire donc le gain $\boxed{\text{Klimit}=8}$.

Q3 : Pour obtenir une marge de phase de -45° on se place à -135° (-180+45°) et on constate que le gain doit être augmenté de 1dB pour passer à 0dB ce qui signifie que le gain $\boxed{K = 2 \cdot 10^{\frac{1}{20}} = 2{,}24}$

Q4 : Pour obtenir une marge de gain de 6dB il faut relever le gain de 6dB ce qui correspond à un gain $\boxed{K=4}$

Exercice n°7 : Un asservissement de position

Q1 : KM est exprimé en m/(V.s)

Q2 : $vc(t)=\dfrac{dxc(t)}{dt}$ donc $Vc(p)=pXc(p)$ donc $\dfrac{Xc(p)}{U(p)}=\dfrac{KM}{p\cdot(1+\tau m.p)}$

Q3 : Il s'agit du capteur de position qui traduit un déplacement en m vers une tension en V donc β est exprimé en V/m.

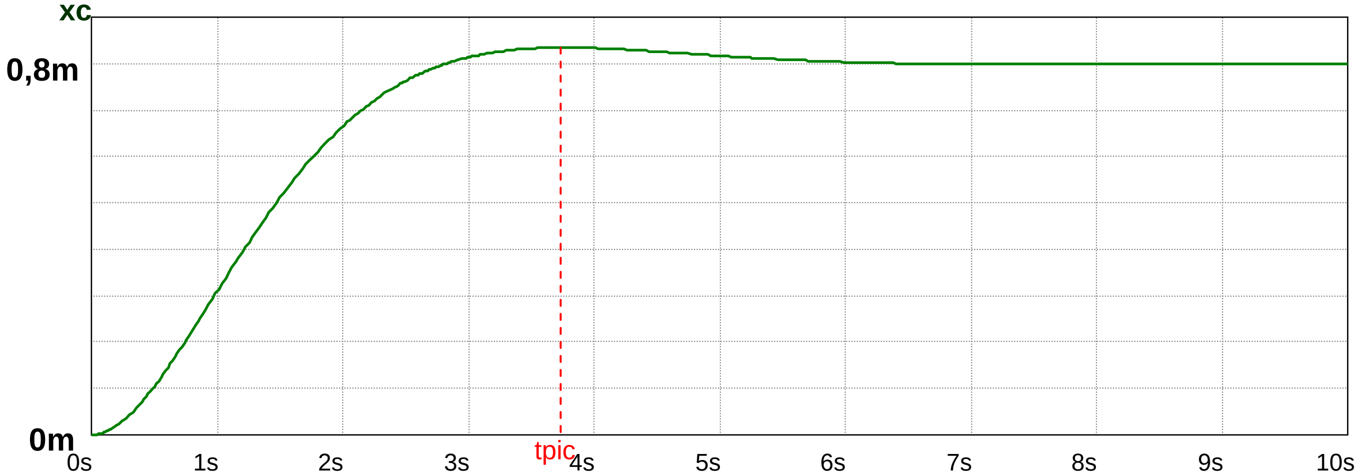
Q4 : $FTBF(p)=\dfrac{Xc(p)}{E(p)}=\dfrac{K.H(p)}{1+\beta K.H(p)}$ soit $FTBF(p)=\dfrac{\dfrac{KKM}{p\cdot(1+\tau m.p)}}{1+\dfrac{\beta K.KM}{p\cdot(1+\tau m.p)}}=\dfrac{K.KM}{p\cdot(1+\tau m.p)+\beta K.KM}$

soit $FTBF(p)=\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{p}{\beta K.KM}+\dfrac{\tau m p^2}{\beta K.KM}}$ de la forme $FTBF(p)=\dfrac{A}{1+\dfrac{2m.p}{\omega o}+\left(\dfrac{p}{\omega o}\right)^2}$

par identification $A=\dfrac{1}{\beta}=0{,}4m/V$ $\quad \omega o=\sqrt{\dfrac{\beta.K.KM}{\tau m}}$ et $\dfrac{2m}{\omega o}=\dfrac{1}{\beta.K.KM}$ soit $m=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\beta.K.KM.\tau m}}$

Q5 : Comme on fixe $m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\beta.K.KM.\tau m}}$ alors $4.\beta.K.KM.\tau m=2$ soit $K=\dfrac{1}{2.\beta.KM.\tau m}=1{,}67$

Q6 : Comme m=0,707 alors D%≈4,3% et comme ωo=1,18rad/s tpic=3,76s



Exercice n°8 : Un intégrateur pur pour le niveau d'un réservoir

Q1 : On peut écrire que K=qs/h. Comme le débit s'exprime en m^3/s et que la hauteur est en m alors K s'exprime en m^2/s

Q2 : $\dfrac{dV}{dt}=qe-qs$ avec V=S.h et qs=K.h

Q3 : En adoptant la transformée de Laplace il vient $p.V(p)=Qe(p)-Qs(p)$ soit $p.S.H(p)=Qe(p)-K.H(p)$ que l'on peut écrire sous la forme $H(p)\cdot(p.S+K)=Qe(p)$ soit $\dfrac{H(p)}{Qe(p)}=\dfrac{1}{K+p.S}=\dfrac{1}{K}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{pS}{K}}$

de la forme indiquée avec $\alpha=\dfrac{1}{K}$ et $\tau=\dfrac{S}{K}$

Q4 : $FTBF(p)=\dfrac{H(p)}{Hc(p)}=\dfrac{\dfrac{Ki}{p}\cdot\dfrac{\alpha}{1+\tau p}}{1+\dfrac{Ki}{p}\cdot\dfrac{\alpha}{1+\tau p}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{p(1+\tau p)}{Ki.\alpha}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{p}{Ki.\alpha}+\dfrac{\tau p^2}{Ki.\alpha}}$

de la forme $FTBF(p)=\dfrac{1}{1+\dfrac{2m.p}{\omega o}+\left(\dfrac{p}{\omega o}\right)^2}$ avec $\boxed{\omega o=\sqrt{\dfrac{Ki.\alpha}{\tau}}}$ et $\dfrac{2m}{\omega o}=\dfrac{1}{Ki.\alpha}$ soit $\boxed{m=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{Ki.\alpha\tau}}}$

Pour ne pas obtenir de dépassement il faut que m=1 donc $Ki=\dfrac{1}{4\alpha\tau}=\dfrac{K^2}{4S}$ donc $Ki=250.10^{-9}m^4/s^2$

Q5 : Avec ce type de correction il n'existe pas d'erreur de position car comme le montre la FTBF le gain statique est de 1. La hauteur d'eau obtenu correspond directement à la hauteur de l'eau attendu en consigne.

Q6 : Il existe plusieurs techniques permettant de mesurer le niveau de l'eau dans un réservoir. Un système de mesure par ultrason ou capacitif...

Exercice n°9 : Correction proportionnelle pour la confection d'un sirop

Q1 : La réponse indicielle proposée n'est pas celle d'une fonction de transfert du 1er ordre car la tangente à l'origine est horizontale. Le paramètre K_T=10°C/V

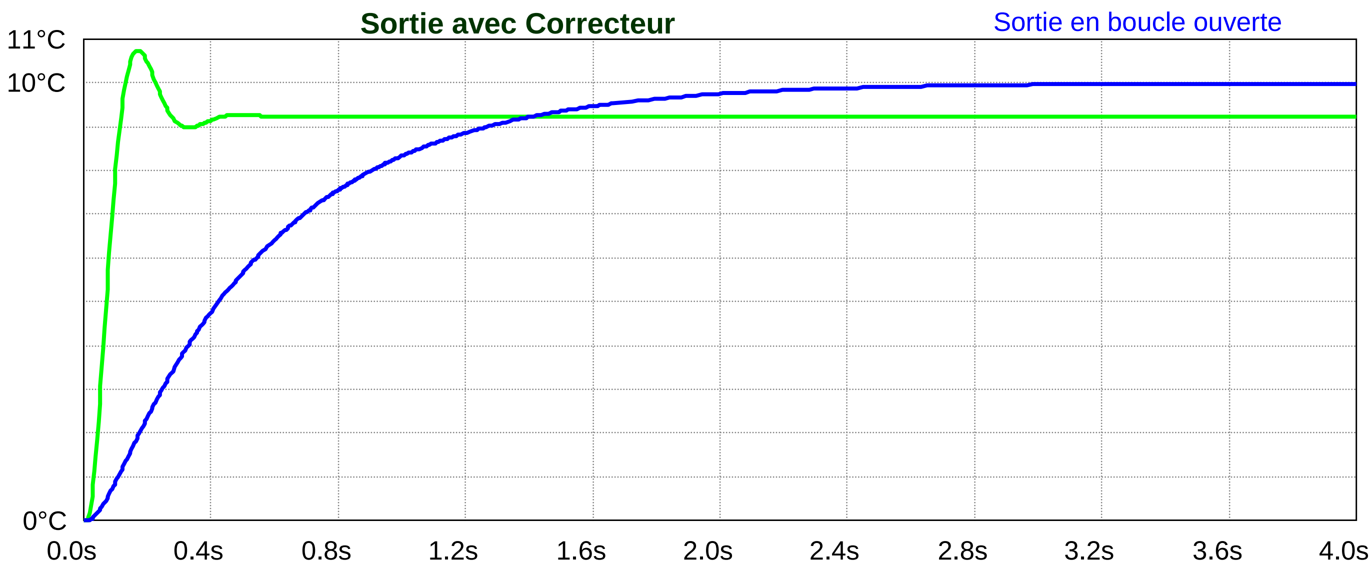
Q2 : $FTBF(p)=\dfrac{\Delta Tr(p)}{\Delta Tc(p)}=\dfrac{K.H(p)}{1+K.H(p)}$ soit $FTBF(p)=\dfrac{\dfrac{K.K_T}{1+2m\dfrac{p}{\omega o}+\left(\dfrac{p}{\omega o}\right)^2}}{1+\dfrac{K.K_T}{1+2m\dfrac{p}{\omega o}+\left(\dfrac{p}{\omega o}\right)^2}}=\dfrac{K.K_T}{1+K.K_T+2m\dfrac{p}{\omega o}+\left(\dfrac{p}{\omega o}\right)^2}$

que l'on peut mettre sous la forme $FTBF(p)=\dfrac{K.K_T}{1+K.K_T}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{2m}{1+K.K_T}\dfrac{p}{\omega o}+\dfrac{1}{1+K.K_T}\cdot\left(\dfrac{p}{\omega o}\right)^2}$

de la forme $FTBF(p)=\dfrac{\alpha}{1+\dfrac{2m_1.p}{\omega o_1}+\left(\dfrac{p}{\omega o_1}\right)^2}$

avec $\boxed{\alpha=\dfrac{K.K_T}{1+K.K_T}}$ $\boxed{\omega o_1=\omega o\sqrt{1+K.K_T}}$ et $\dfrac{2m_1}{\omega o_1}=\dfrac{2m}{1+K.K_T}\dfrac{1}{\omega o}$ soit $\boxed{m_1=\dfrac{m}{\sqrt{1+K.K_T}}}$

Q3 : Avec les valeurs proposées on en déduit α=0,923 fo1=3,6Hz et m1=0,5
on en déduit D%= et tpic = ce qui permet d'obtenir le tracé suivant :



Q5 : Comme on peut l'observer le temps de réponse est beaucoup plus court même s'il n'est pas totalement précis puisque il existe une erreur.