Critère de Routh : Exercices corrigés

Exercice n°1 : Application directe du critère de Routh

Sujet

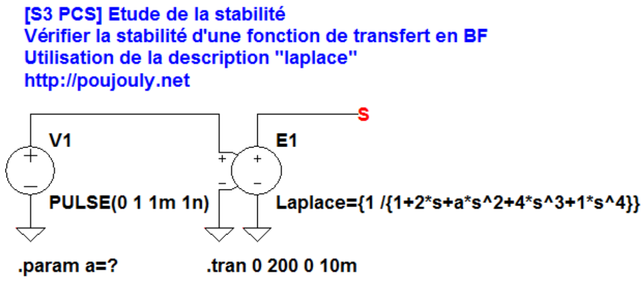
Q1 : On considère les fonctions de transferts en boucle fermée suivantes :

$$T1(p)=\frac{1}{1+6p+3p^2+5p^3+p^4} \quad \text{et} \quad T2(p)=\frac{2}{1+16p+3p^2+5p^3+p^4}$$

Déterminer la stabilité pour ces 2 fonctions de transferts en appliquant le critère de Routh.

Q2 : On considère la fonction de transfert en boucle fermée telle que $T(p)=\frac{1}{1+2p+a.p^2+4p^3+p^4}$. En appliquant le critère de Routh, déterminer la valeur limite de a qui rend le système stable.

Afin de vérifier votre résultat on vous propose d'utiliser la simulation LTSpice suivante dans laquelle on décrit la fonction de transfert directement sous la forme de Laplace (La variable s correspond à la variable p). Compte tenu des techniques d'intégration du logiciel de simulation LTSpice nous vous proposons de prendre des valeurs de a pas trop proche de la valeur limite afin d'obtenir un résultat de simulation exploitable.



Correction

Q1 pour $T_1(p)$

p^4	1	3	1
p^3	5	6	0
p^2	$\frac{5\times3-1\times6}{5}=\frac{9}{5}$	$\frac{5\times1-1\times0}{5}=1$	0
p	$\frac{\frac{9}{5}\times6-5\times1}{9/5}=\frac{29}{9}$	$\frac{\frac{9}{5}\times0-5\times0}{9/5}=0$	
1	$\frac{\frac{29}{9}\times1-\frac{9}{5}\times0}{29/9}=1$		

tous les coefficients sont >0 donc le système est STABLE

Pour $T_2(p)$

p^4	1	3	1
p^3	5	16	0
p^2	$\frac{5\times 3-1\times 16}{5}=-\frac{1}{5}$		
p^1			
1			

⚠ <0 donc le système est INSTABLE

Q2

p^4	1	a	1
p^3	4	2	0
p^2	$\frac{4a-2}{4}=a-0{,}5$	1	
p	$\frac{2a-5}{a-0{,}5}$	0	
1	1		

il Faut que $a-0{,}5>0$ et $2a-5>0$

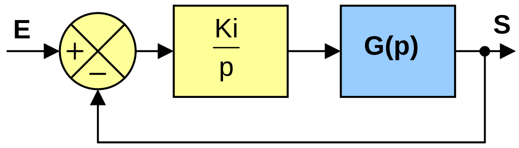
donc au Final il Faut que $a>\frac{5}{2}$ pour que le système soit stable

Exercice n°2 : Stabilité d'un système bouclé

Sujet

On considère le système bouclé suivant dans lequel on donne

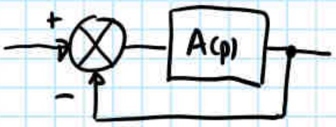
$$G(p) = \frac{100}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \quad \text{avec } \tau_1 = 2\text{s et } \tau_2 = 10\text{s}$$



Q1 : Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée

Q2 : Etudier la stabilité en fonction de Ki par le critère de Routh.

Correction



$$FTBF = \frac{A(p)}{1+A(p)} = \frac{1}{1+\frac{1}{A(p)}}$$

donc $$FTBF = \frac{1}{1+\frac{p}{Ki}\cdot\frac{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{100}}$$

soit $$\boxed{FTBF = \frac{100Ki}{100.Ki + p + (\tau_1+\tau_2)p^2 + \tau_1\tau_2 p^3}}$$

Tableau de Routh :

p^3	$\tau_1\tau_2$	1
p^2	$\tau_1+\tau_2$	$100ki$
p	$\frac{\tau_1+\tau_2-\tau_1\tau_2 100ki}{\tau_1+\tau_2}$	0
1	$100ki$	

Pour que le système soit stable il faut que

$100Ki > 0$ $\boxed{Ki > 0}$ et

$\tau_1+\tau_2 - \tau_1\tau_2 100ki > 0$ soit $\boxed{ki < \frac{\tau_1+\tau_2}{100.\tau_1\tau_2} = 6\,\text{mrad/s}}$