



# Les fonctions de Bessel



## Contexte

Dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal de fréquence  $f_a$ , un signal modulé en fréquence autour d'une porteuse de fréquence  $f_p$  peut s'écrire sous la forme :  $S_{FM}(t) = S_o \cdot \cos(2\pi f_p t + m \cdot \sin(2\pi f_a t))$ .

En développant l'expression du signal  $S_{FM}(t)$ , on obtient :

$$S_{FM}(t) = S_o \cdot [\cos(2\pi f_p t) \cdot \cos[m \cdot \sin(2\pi f_a t)] - \sin(2\pi f_p t) \cdot \sin[m \cdot \sin(2\pi f_a t)]]$$

Les 2 termes  $\cos[m \cdot \sin(2\pi f_a t)]$  et  $\sin[m \cdot \sin(2\pi f_a t)]$  peuvent s'exprimer au moyen des développements suivant :

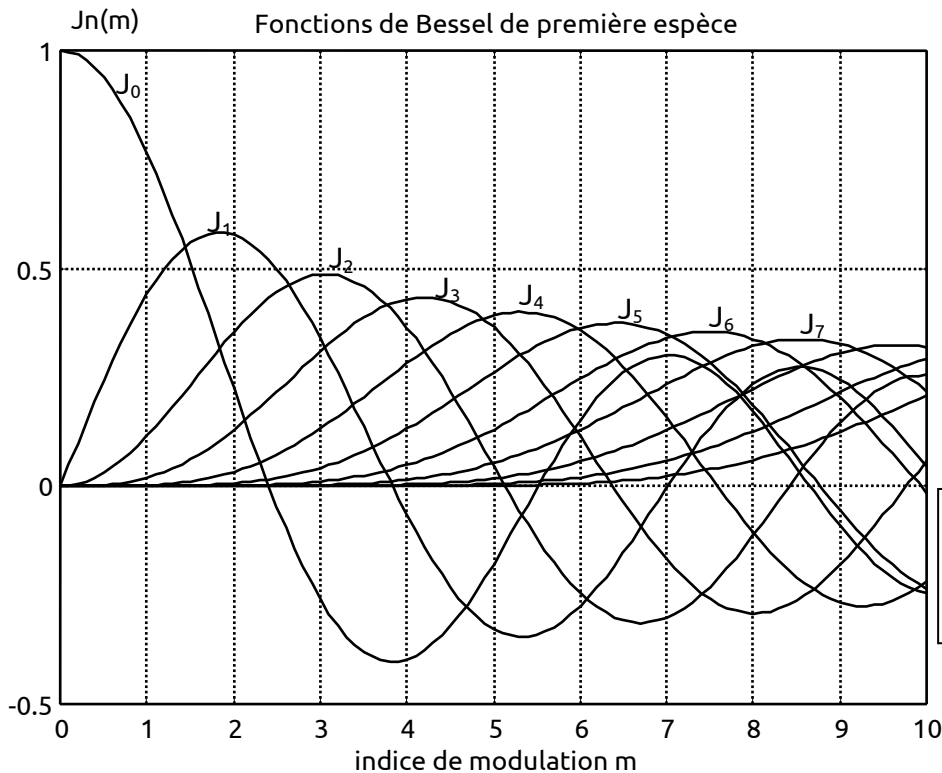
$$\cos[m \cdot \sin(2\pi f_a t)] = J_0(m) + 2 \cdot J_2(m) \cdot \cos(2\pi \cdot 2f_a t) + 2 \cdot J_4(m) \cdot \cos(2\pi \cdot 4f_a t) + \dots$$

$$\sin[m \cdot \sin(2\pi f_a t)] = 2 \cdot J_1(m) \cdot \sin(2\pi f_a t) + 2 \cdot J_3(m) \cdot \sin(2\pi \cdot 3f_a t) + 2 \cdot J_5(m) \cdot \sin(2\pi \cdot 5f_a t) + \dots$$

ou  $J_n(m)$  est **la fonction de Bessel** de première espèce d'ordre  $n$  de la variable  $m$  et dont les valeurs sont données sur le graphique et le tableau suivant.



## Abaques, Tableau de valeurs & propriétés



$$[J_0(m)]^2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(m)]^2 = 1$$

$$J_n(m) = \left(\frac{m}{2}\right)^n \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \cdot m^{2p}}{2^{2p} \cdot p! \cdot (n+p)!}$$

Ordre	Indice de modulation m													
	0,2	0,5	1	1,5	2	2,4	3	3,83	4	5	5,14	6	8	10
0	0,99	0,938	0,765	0,512	0,224	0	-0,26	-0,403	-0,397	-0,178	-0,131	0,15	0,172	-0,246
1	0,1	0,242	0,44	0,558	0,577	0,52	0,339	0	-0,066	-0,328	-0,34	-0,277	0,235	0,044
2	≈0	0,03	0,115	0,232	0,353	0,431	0,486	0,403	0,364	0,047	0	-0,243	-0,113	0,255
3	≈0	≈0	0,02	0,061	0,129	0,198	0,309	0,420	0,43	0,365	0,339	0,115	-0,291	0,058
4	≈0	≈0	≈0	0,012	0,034	0,064	0,132	0,255	0,281	0,391	0,397	0,358	-0,105	-0,22
5	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,016	0,043	0,113	0,132	0,261	0,279	0,362	0,186	-0,234
6	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,011	0,04	0,049	0,131	0,146	0,246	0,338	-0,015
7	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,012	0,015	0,053	0,062	0,13	0,32	0,217
8	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,018	0,022	0,057	0,223	0,318
9	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,021	0,127	0,292
10	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,06	0,208
11	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,026	0,123
12	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,009	0,063