DV5 : Systèmes linéaires du 2nd ordre

Eléments de correction

Exercice n°1 : Etude d'un filtre passe bas

Q1 : Il s'agit de montage suiveur. Dans cette configuration on ne préleve aucun courant sur l'entrée + et on recopie le potentiel V+ sur la sortie.

Q2 : $V_A = \dfrac{\dfrac{V_{IN}}{R1} + V_{OUT}\cdot jC1\omega}{\dfrac{1}{R1} + jC1\omega} = \dfrac{V_{IN} + V_{OUT}\cdot jR1C1\omega}{1 + jR1C1\omega}$

Q3 : Il s'agit d'un simple filtre RC passe bas du 1er ordre donc $V_{OUT} = \dfrac{V_A}{1 + jR2C2\omega}$

Q4 : En utilisant les relations établies pour les 2 questions précédentes :

$V_{OUT}\cdot(1 + jR2C2\omega) = \dfrac{V_{IN} + V_{OUT}\cdot jR1C1\omega}{1 + jR1C1\omega}$ donc $V_{OUT}\cdot[(1 + jR2C2\omega)\cdot(1 + jR1C1\omega) - jR1C1\omega] = V_{IN}$

soit $T(j\omega) = \dfrac{V_{OUT}(j\omega)}{V_{IN}(j\omega)} = \dfrac{1}{1 + jR2C2\omega + (j\omega)^2 R1R2C1C2}$

Q4 : Cette fonction de transfert peut se mettre sous une forme canonique d'un filtre passe bas du 2nd ordre de la forme $T(j\omega) = \dfrac{1}{1 + 2m\dfrac{j\omega}{\omega o} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$

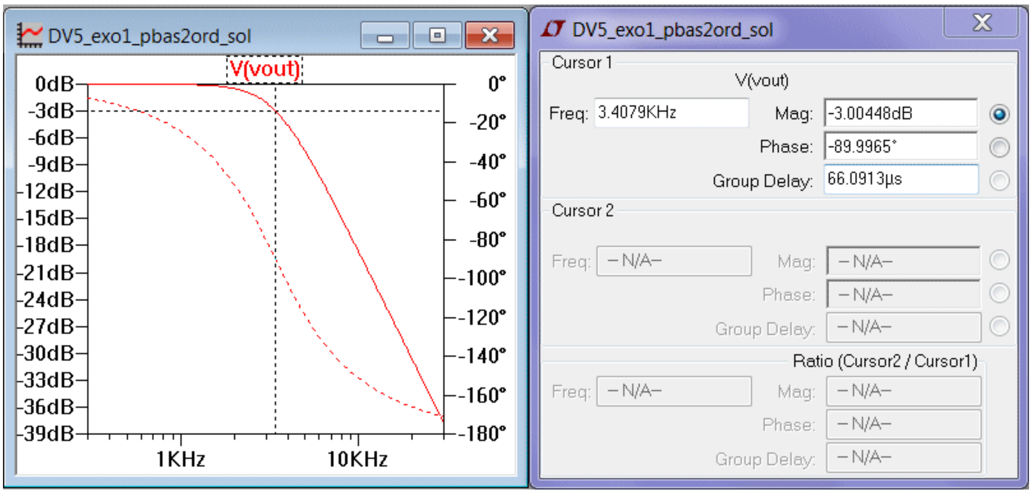
avec $\dfrac{1}{\omega o^2} = R1R2C1C2$ et $\dfrac{2m}{\omega o} = R2C2$. On en déduit donc $\boxed{\omega o = \dfrac{1}{\sqrt{R1R2C1C2}}}$ et $\boxed{m = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R2C2}{R1C1}}}$

Q6 : En posant C1=C2=C on en déduit que $fo = \dfrac{1}{2\pi C\sqrt{R1R2}}$ et $m = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R2}{R1}}$

soit $R2 = 4.m^2 R1$ et donc $C = \dfrac{1}{2\pi fo.2.m.R1}$

avec R1=10kΩ et fo=fc=3400Hz car m=0,707 (Dans ce cas la fréquence de coupure est confondue avec la fréquence propre) on obtient $\boxed{\text{R2= 20k}\Omega}$ et $\boxed{\text{C=3,3nF}}$

Une simulation avec LTSpice permet de vérifier rapidement le bon dimensionnement :



Exercice n°2 : Etude d'un filtre spécial voix

Q1 : Le filtre proposé est constitué par un filtre CR (1000pF/1MΩ) passe haut du 1er ordre suivi d'une cellule Sallen & Key passe bas du 2nd ordre.

Q2 : $fc = \dfrac{1}{2\pi.1M\Omega.1000pF} = 159{,}15Hz$ ce qui correspond à la fréquence 160Hz annoncée sur le schéma

Q3 : on retrouve bien une forme telle que $T(j\omega) = \dfrac{1}{1 + 2m\dfrac{j\omega}{\omega o} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$

avec $\dfrac{1}{\omega o^2} = R_1R_2C_1C_2$ et $\dfrac{2m}{\omega o} = C_2(R_1+R_2)$. On en déduit donc $\boxed{\omega o = \dfrac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}}$ et $\boxed{m = \dfrac{C_2(R_1+R_2)}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}}$

Q4 : Avec les valeurs proposés sur le montage R_1=243kΩ R_2=1,74MΩ C_1=220pF C_2=47pF
m=0,704 et fo=2407Hz
Comme m≈0,707 fo correspond à la fréquence de coupure à -3dB et l'on retrouve donc bien l'indication 2,4kHz.

Exercice n°3 : Etude d'un filtre passe bande

Q1 : On reconnait un montage amplificateur non inverseur donc $K = 1 + \dfrac{R_B}{R_A}$

Q2 : $V+ = V_{OUT}/K$

Q3 : $V_A = \dfrac{\dfrac{V_{IN}}{R} + \dfrac{V_{OUT}}{R} + \dfrac{V_{OUT}}{K}jC\omega}{\dfrac{2}{R} + 2jC\omega}$ soit $V_A = \dfrac{V_{IN} + V_{OUT} + \dfrac{V_{OUT}}{K}jRC\omega}{2 + 2jRC\omega}$

Q4 : On reconnait un simple passe haut entre V_A et V+ donc : $\dfrac{V_{OUT}}{K} = \dfrac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \cdot V_A$ soit $\dfrac{V_{OUT}}{K} \cdot \dfrac{1 + jRC\omega}{jRC\omega} = V_A$

Q5 : En utilisant les relations établies aux questions précédentes :

$$\frac{V_{OUT}}{K} \cdot \frac{1 + jRC\omega}{jRC\omega} = \frac{V_{IN} + V_{OUT} + \dfrac{V_{OUT}}{K}jRC\omega}{2 + 2jRC\omega}$$

soit $\dfrac{V_{OUT}}{K} \cdot (1 + jRC\omega) \cdot (2 + 2jRC\omega) = V_{IN}jRC\omega + V_{OUT}jRC\omega + \dfrac{V_{OUT}}{K}(jRC\omega)^2$

soit $\dfrac{V_{OUT}}{K} \cdot \left[(1 + jRC\omega) \cdot (2 + 2jRC\omega) - (jRC\omega)^2 - KjRC\omega\right] = V_{IN}jRC\omega$

$\dfrac{V_{OUT}}{K} \cdot \left[2 + jRC\omega(4-K) + (jRC\omega)^2\right] = V_{IN}jRC\omega$ donc $2\dfrac{V_{OUT}}{K} \cdot \left[1 + jRC\omega\dfrac{(4-K)}{2} + \dfrac{(jRC\omega)^2}{2}\right] = V_{IN}jRC\omega$

soit $\boxed{T(j\omega) = \dfrac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \dfrac{\dfrac{KjRC\omega}{2}}{1 + jRC\omega\dfrac{(4-K)}{2} + \dfrac{(jRC\omega)^2}{2}}}$

Q6 : on retrouve bien une forme d'un passe bande du 2nd ordre avec $T(j\omega) = \dfrac{Amax \cdot \dfrac{j\omega}{Q.\omega o}}{1 + \dfrac{j\omega}{Q.\omega o} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$

avec $\dfrac{1}{\omega o^2} = \dfrac{(RC)^2}{2}$ $\dfrac{1}{Q.\omega o} = RC \cdot \dfrac{4-K}{2}$ et $\dfrac{Amax}{Q.\omega o} = \dfrac{KRC}{2}$

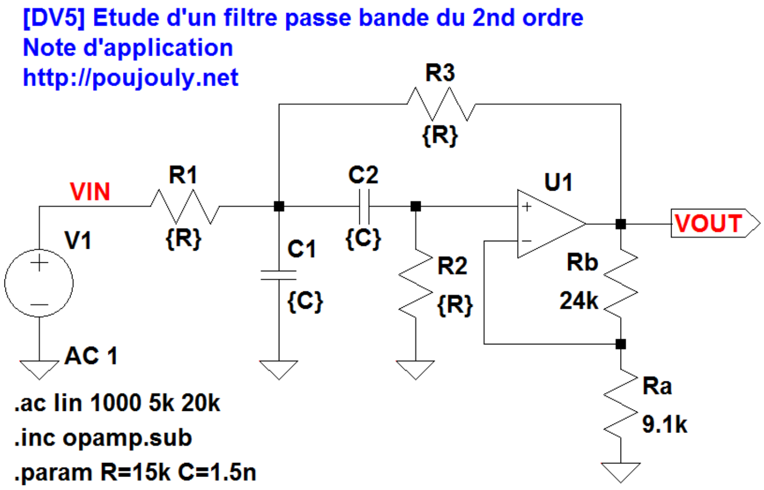
on en déduit donc $\boxed{\omega o = \dfrac{\sqrt{2}}{RC}}$ $\dfrac{1}{Q} = \dfrac{4-K}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{2}}{4-K}}$ et $\boxed{Amax = \dfrac{K}{4-K}}$

Q6 : Cela signifie que Q=fo/BP=4 comme $K=4-\frac{\sqrt{2}}{Q}$ alors K=3,64

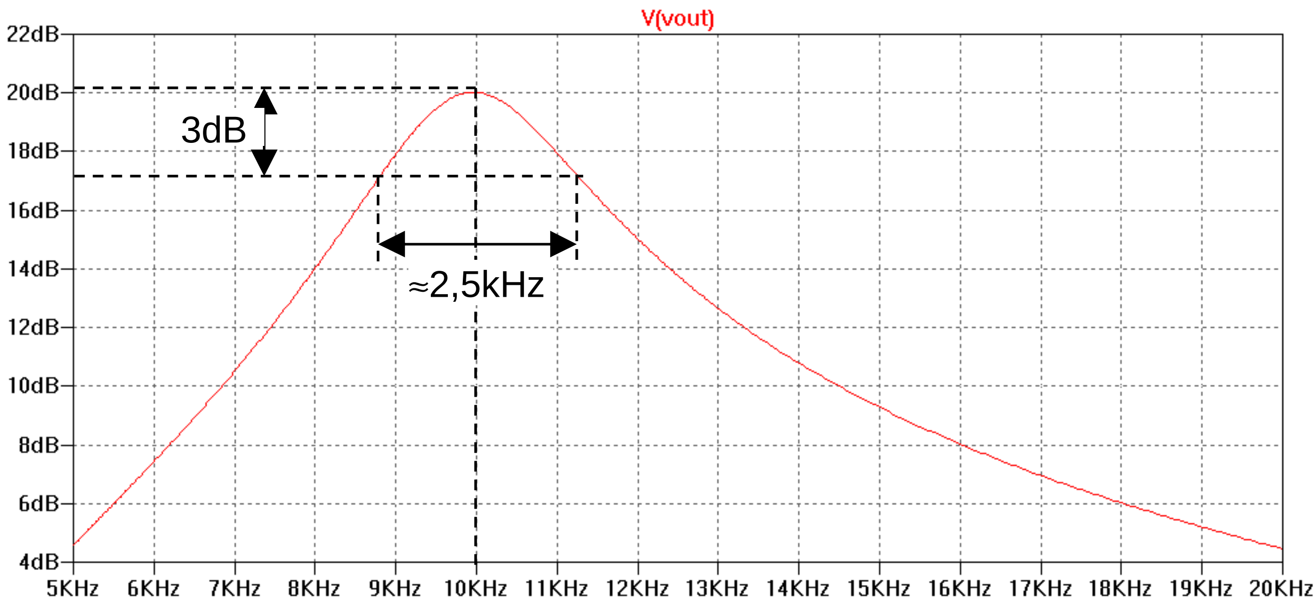
Il faut donc que $\frac{R_B}{R_A}=2{,}64$ que l'on peut obtenir en prenant R_A= 9,1kΩ et R_B=24kΩ

par ailleurs il faut que $RC=\frac{\sqrt{2}}{2\pi fo}$ =22,5µs que l'on peut obtenir en prenant R=15kΩ et C=1,5nF

Le réglage de Q avec le coefficient K impose l'amplification maximale à une valeur de 10,11 soit un gain maximum de 20,1dB



La simulation permet de vérifier la bonne cohérence du calcul et du dimensionnement puisque nous retrouvons les paramètres fo, BP-3dB et Amax. Pour faciliter la lecture on peut utiliser 2 curseurs et/ou choisir une échelle de fréquence linéaire.



Exercice n°4 : Conception d'un filtre passe haut

Q1 : Le calcul de la fonction de transfert est classique :

Etape 1 : Théorème de Millman au point A (point commun entre les 2 condensateurs C et la résistance R2)

$$VA=\frac{E.jC\omega+SjC\omega+\dfrac{S}{R_2}}{2jC\omega+\dfrac{1}{R_2}}=\frac{E.jR_2C\omega+SjR_2C\omega+S}{2jR_2C\omega+1}$$

Etape 2 : Relation entre VA & V+=S : il s'agit d'un simple circuit CR1 passe haut donc

$$S=\frac{jR_1C\omega}{1+jR_1C\omega}\cdot VA \quad \text{soit} \quad S\cdot\frac{1+jR_1C\omega}{jR_1C\omega}=VA$$

Etape 3 : A partir des 2 équations précédentes :

$$S\cdot\frac{1+jR_1C\omega}{jR_1C\omega}=\frac{E.jR_2C\omega+SjR_2C\omega+S}{2jR_2C\omega+1}$$

soit $S\cdot(1+jR_1C\omega)\cdot(2jR_2C\omega+1)=E.R_1R_2(jC\omega)^2+S.R_1R_2(jC\omega)^2+S.jR_1C\omega$

donc $S\cdot\left[(1+jR_1C\omega)\cdot(2jR_2C\omega+1)-.R_1R_2(jC\omega)^2-.jR_1C\omega\right]=E.R_1R_2(jC\omega)^2$

que l'on peut écrire $S\cdot\left[1+2jR_2C\omega+.R_1R_2(jC\omega)^2\right]=E.R_1R_2(jC\omega)^2$

ce qui nous donne bien $T(j\omega)=\dfrac{S(j\omega)}{E(j\omega)}=\dfrac{(j\omega)^2C^2R_1R_2}{1+2jR_2C\omega+(j\omega)^2C^2R_1R_2}$

Q2 : Cette fonction de transfert est de la forme $T(j\omega)=\dfrac{\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}{1+2m\dfrac{j\omega}{\omega o}+\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$

avec $\dfrac{1}{\omega o^2}=R_1R_2C^2$ et $\dfrac{2m}{\omega o}=2R_2C$. On en déduit donc $\boxed{\omega o=\dfrac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}}$ et $\boxed{m=\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}}$

Le choix m=0,707 impose $R_1=2R_2$ dans ces conditions $C=\dfrac{1}{2\pi foR2\sqrt{2}}$

Le choix R_2=8,2kΩ R_1=16kΩ et C=47nF est un bon compromis pour les séries normalisées classiques (E24 pour les résistances et E12 pour les condensateurs)
Une vérification sous LTspice permet de retrouver la fréquence de coupure de 300Hz