Système linéaire du 2nd ordre & filtrage

UNIVERSITÉ PARIS SUD
IUT DE CACHAN Département GEii1

Devoir de vacances d'été N°5 S.POUJOULY @poujouly http://poujouly.net

Exercice n°1 : Un filtre passe bas anti-repliement

Q1 : La fonction de transfert $T(j\omega)=\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{1}{1+jC_2\omega(R_1+R_2)+(j\omega)^2C_1C_2R_1R_2}$ est de la forme

$T(j\omega)=\frac{1}{1+2m\frac{j\omega}{\omega o}+\left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$ avec $\boxed{\omega o=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}}$ donc $\boxed{fo=\frac{1}{2\pi\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}}$ et $\boxed{m=\frac{C_2\cdot(R_1+R_2)}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}}$

Q2 : m≈0,5 (0,498) et fo≈5kHz (4,95kHz)

Q3 : $fc=\frac{1}{2\pi RC}$ donc fc≈5kHz (4,82kHz)

Q4 : A partir des indications concernant les fonctions de transfert normalisée de Butterworth passe bas on remarque que la fonction de transfert d'un filtre du 3ième ordre est constitué d'un second ordre avec une fréquence propre égale à la fréquence de coupure fc et un coefficient d'amortissement m=0,5 suivi d'un filtre passe bas dont la fréquence de coupure est fc.
Ceci correspond parfaitement à la réalisation proposé car il s'agit d'un filtre du 3ième ordre et dont la fréquence de coupure est de 5kHz qui justifie l'indication portée sur le schéma.

Q5 : On calcule x=Fatténuation/Fc avec Fatténuation=Fe/2=11,025kHz soit x=2,2
en reportant cette valeur de x dans l'abaque et en sélectionnant la courbe n=3 on obtient une atténuation légèrement supérieure à 20dB ce qui est nettement suffisant pour ce filtre anti-repliement.

Exercice n°2 : Un filtre pour tweeter

Q1 : Si l'on désigne par Zeq l'impédance équivalent constitué par L & R en // alors $Zeq=\frac{R\cdot jL\omega}{R+jL\omega}$

Dans ces conditions la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme : $T(j\omega)=\frac{Vh(j\omega)}{Va(j\omega)}=\frac{Zeq}{Zeq+\frac{1}{jC\omega}}$

en remplaçant l'expression de Zeq il vient : $T(j\omega)=\frac{\frac{R\cdot jL\omega}{R+jL\omega}}{\frac{R\cdot jL\omega}{R+jL\omega}+\frac{1}{jC\omega}}=\frac{R\cdot jL\omega\cdot jC\omega}{R\cdot jL\omega\cdot jC\omega+R+jL\omega}$

soit $\boxed{T(j\omega)=\frac{LC(j\omega)^2}{1+\frac{jL\omega}{R}+LC(j\omega)^2}}$

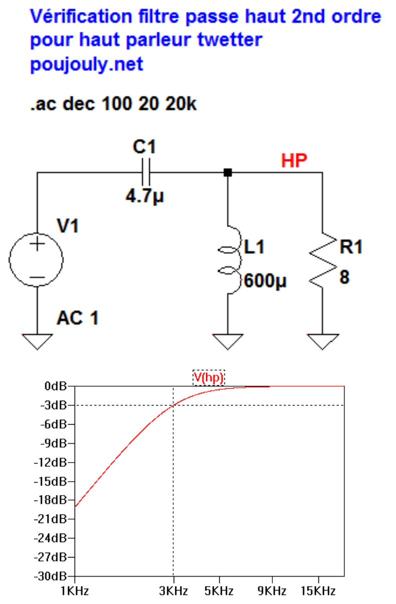
Q2 : On peut écrire la fonction de transfert sous la forme canonique d'un filtre passe haut du 2nd ordre tel que

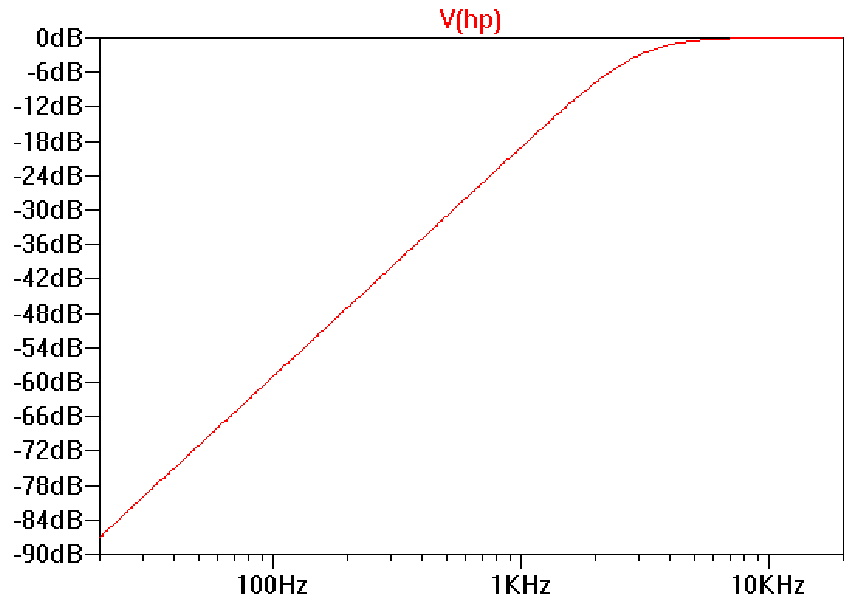
$\boxed{T(j\omega)=\frac{\left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)^2}{1+2m\cdot\left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)^2}}$ Par identification on en déduit que $\boxed{\omega o=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{m=\frac{L\omega o}{2R}=\frac{1}{2R}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Q3: Des équations précédentes on peut écrire que $L=\frac{R.m}{\pi\cdot fo}$ avec fo=fc=3kHz car m=0,707

Par ailleurs $C=\frac{1}{L\cdot(2\pi fo)^2}$ donc on en déduit L= et C= et on souhaite obtenir une fréquence de coupure de 3kHz. En déduire les valeurs de $\boxed{\text{L=600µH et C≈4,7µF}}$.

Q4:





Exercice n°3 : Une cellule universelle

Q1 : En appliquant le pont diviseur il vient facilement que : $V+_{AOP1} = \frac{R3}{R3+R4} \cdot V_{BP}$

En appliquant le théorème de Millmann au point $V-_{AOP1}$ il vient : $V-_{AOP1} = \dfrac{\frac{V_{IN}}{R1} + \frac{V_{LP}}{R2} + \frac{V_{HP}}{R2}}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R2}}$ soit

$$V-_{AOP1} = \frac{V_{IN} \cdot R2 + V_{LP} \cdot R1 + V_{HP} \cdot R1}{R2 + 2.R1}$$

Comme l'amplificateur opération fonctionne en régime linéaire alors $V-_{AOP1} = V+_{AOP1}$ donc

$\frac{V_{IN} \cdot R2 + V_{LP} \cdot R1 + V_{HP} \cdot R1}{R2 + 2.R1} = \frac{R3}{R3+R4} \cdot V_{BP}$ que l'on peut écrire

$$V_{HP} = -\left(\frac{R2}{R1} \cdot V_{IN} + V_{LP}\right) + \frac{R3}{R3+R4} \cdot \left(2 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot V_{BP} \quad Eq(1)$$

Q2 : Comme il s'agit d'une structure de type inverseur alors $V_{BP} = -\dfrac{\frac{1}{jC\omega}}{R2} \cdot V_{HP}$ soit $V_{BP} = -\frac{1}{jR2C\omega} \cdot V_{HP}$

Il en est de même pour l'autre montage donc $V_{LP} = -\frac{1}{jR2C\omega} \cdot V_{BP}$

Q3 : On commence par établir la fonction de transfert $T_{LP} = \frac{V_{LP}}{V_{IN}}$

Comme $V_{BP} = -jR2C\omega \cdot V_{LP}$ alors $V_{HP} = (jR2C\omega)^2 \cdot V_{LP}$ ce qui en remplaçant dans l'équation (1) nous donne :

$(jR2C\omega)^2 \cdot V_{LP} = -\left(\frac{R2}{R1} \cdot V_{IN} + V_{LP}\right) - \frac{R3}{R3+R4} \cdot \left(2 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot (jR2C\omega) \cdot V_{LP}$ que l'on peut écrire sous la forme :

$$V_{LP} \cdot \left[1 + \frac{R3}{R3+R4} \cdot \left(2 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot (jR2C\omega) + (jR2C\omega)^2\right] = -\frac{R2}{R1} \cdot V_{IN}$$

soit $\boxed{T_{LP} = \frac{V_{LP}}{V_{IN}} = -\frac{R2}{R1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R3}{R3+R4} \cdot \left(2 + \frac{R2}{R1}\right) \cdot (jR2C\omega) + (jR2C\omega)^2}}$ de la forme $\boxed{T_{LP} = \frac{A_{LP}}{1 + 2m\frac{j\omega}{\omega o} + \left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)^2}}$

avec $\boxed{\omega o = \frac{1}{R2.C}}$ $\boxed{A_{LP} = -\frac{R2}{R1}}$ et $\boxed{m = \frac{R3}{R3+R4} \cdot \left(1 + \frac{R2}{2.R1}\right)}$

Il est alors facile de déduire les autres fonctions de transfert :

$$\boxed{T_{BP}=\frac{V_{BP}}{V_{IN}}=\frac{R2}{R1}\cdot\frac{jR2C\omega}{1+\frac{R3}{R3+R4}\cdot\left(2+\frac{R2}{R1}\right)\cdot(jR2C\omega)+(jR2C\omega)^2}}\quad\text{de la forme}\quad\boxed{T_{BP}=A_{BP}\cdot\frac{2m\frac{j\omega}{\omega o}}{1+2m\frac{j\omega}{\omega o}+\left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)^2}}$$

$$\text{avec}\ \boxed{\omega o=\frac{1}{R2.C}}\ \boxed{m=\frac{R3}{R3+R4}\cdot\left(1+\frac{R2}{2.R1}\right)}\ \text{et}\ \boxed{A_{BP}=\frac{R2}{R1\cdot 2m}}$$

$$\boxed{T_{HP}=\frac{V_{HP}}{V_{IN}}=-\frac{R2}{R1}\cdot\frac{(jR2C\omega)^2}{1+\frac{R3}{R3+R4}\cdot\left(2+\frac{R2}{R1}\right)\cdot(jR2C\omega)+(jR2C\omega)^2}}\quad\text{de la forme}\quad\boxed{T_{HP}=A_{HP}\cdot\frac{\left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)^2}{1+2m\frac{j\omega}{\omega o}+\left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)^2}}$$

$$\text{avec}\ \boxed{\omega o=\frac{1}{R2.C}}\ \boxed{m=\frac{R3}{R3+R4}\cdot\left(1+\frac{R2}{2.R1}\right)}\ \text{et}\ \boxed{A_{HP}=-\frac{R2}{R1}}$$

Exercice n°4 : Un filtre passe bande

Q1 : $V+_{AOP1}=\dfrac{\frac{V_{IN}}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+jC\omega}$ soit $\boxed{V+_{AOP1}=\dfrac{V_{IN}\cdot R_2+V_2\cdot R_1}{R_2+R_1+jCR_1R_2\omega}}$

Q2 : $V-_{AOP1}=\dfrac{\frac{V_1}{R_2}+V_2\cdot jC\omega}{\frac{1}{R_2}+jC\omega}$ soit $\boxed{V-_{AOP1}=\dfrac{V_1+V_2\cdot jR_2C\omega}{1+jR_2C\omega}}$

Q3 : $\boxed{V+_{AOP2}=\dfrac{V_1}{2}=V-_{AOP2}=V-_{AOP1}=V+_{AOP1}}$

Q4 : En utilisant les équations précédentes on aboutit aux 2 relations suivantes :

$\dfrac{V_1}{2}=\dfrac{V_{IN}\cdot R_2+V_2\cdot R_1}{R_2+R_1+jCR_1R_2\omega}$ Eq(1) et $\dfrac{V_1}{2}=\dfrac{V_1+V_2\cdot jR_2C\omega}{1+jR_2C\omega}$ Eq(2)

En réécrivant l'équation 2 il vient $V_1\cdot(1+jR_2C\omega)=2V_1+2V_2\cdot jR_2C\omega$ soit $V_1\cdot\dfrac{(jR_2C\omega-1)}{2jR_2C\omega}=V_2$ Eq(3)

En réécrivant l'équation 1 il vient : $V_1\cdot(R_2+R_1+jCR_1R_2\omega)=V_{IN}\cdot 2R_2+V_2\cdot 2R_1$

En remplaçant l'expression de V_2 de l'équation 3 dans celle de l'équation 2 on peut alors écrire :

$$V_1\cdot(R_2+R_1+jCR_1R_2\omega)=V_{IN}\cdot 2R_2+V_1\cdot\frac{(jR_2C\omega-1)}{jR_2C\omega}\cdot R_1$$

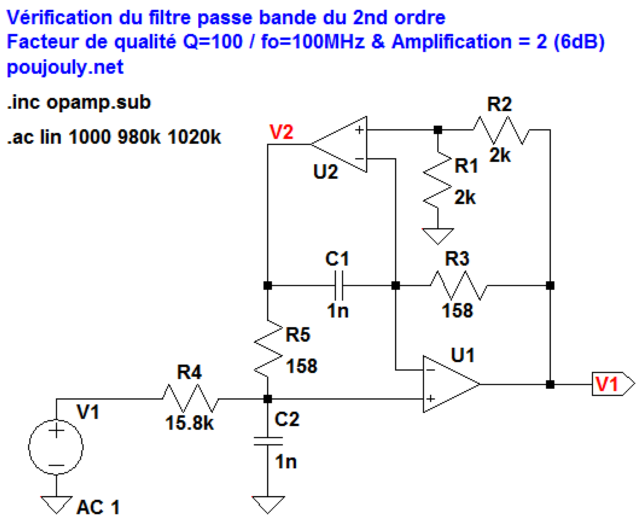
soit : $V_1\cdot(R_2+R_1+jCR_1R_2\omega)\cdot jR_2C\omega=V_{IN}\cdot 2R_2\cdot jR_2C\omega+V_1\cdot(jR_2C\omega-1)\cdot R_1$

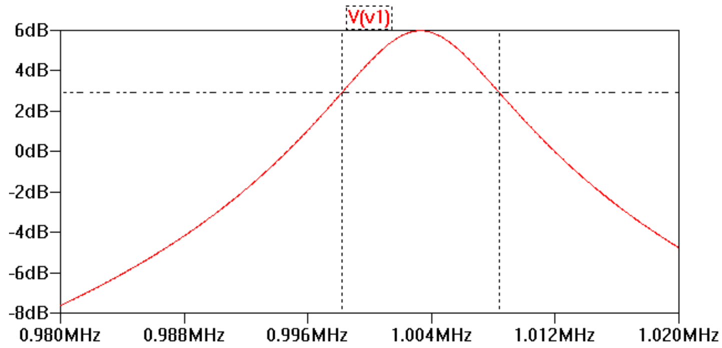
que l'on peut simplifier : $V_1\cdot\left(R_1+jR_2{}^2C\omega+(jCR_2\omega)^2R_1\right)=V_{IN}\cdot 2R_2\cdot jR_2C\omega$

pour aboutir à la fonction de transfert $\dfrac{V_1}{V_{IN}}=2\cdot\dfrac{j\frac{R_2{}^2}{R_1}C\omega}{1+j\frac{R_2{}^2}{R_1}C\omega+(jCR_2\omega)^2}$ de la forme d'une fonction de transfert passe bande du 2nd ordre $\boxed{\dfrac{V_1}{V_{IN}}=A_{BP}\cdot\dfrac{\frac{j\omega}{Q\omega o}}{1+\frac{j\omega}{Q\omega o}+\left(\frac{j\omega}{\omega o}\right)^2}}$ avec $\boxed{\omega o=\dfrac{1}{R_2.C}}$ et $\boxed{Q=\dfrac{R_1}{R_2}}$ et $\boxed{A_{BP}=2}$

En effectuant les applications numériques il vient Q=100 fo=1MHz et une amplification max de 2.

Q5 : Les indications données par le constructeur sont donc légèrement erronés (cela arrive !!) et une simulation LTSpice permet de vérifier très rapidement le résultat proposé ci-dessus par calcul :





NB : Le résultat de simulation ne rejoint le résultat théorique que si l'on choisit un produit gain bande suffisamment grand pour l'amplificateur opérationnel (c'est d'ailleurs le cas pour l'amplificateur opérationnel OPA620 puisqu'il affiche un GBW=200MHz !)