CORRECTION : Devoir N°3 : Systèmes linéaires du 2nd ordre

Devoir N°3 – 18 juillet 2012 S.POUJOULY http://poujouly.net

Exercice n°1 : Un filtre à amortissement variable

Q1 : Pour mener à bien le calcul de la fonction de transfert, il est indispensable d'identifier clairement les différentes parties de ce montage comme le montre la figure 1 ci-contre.

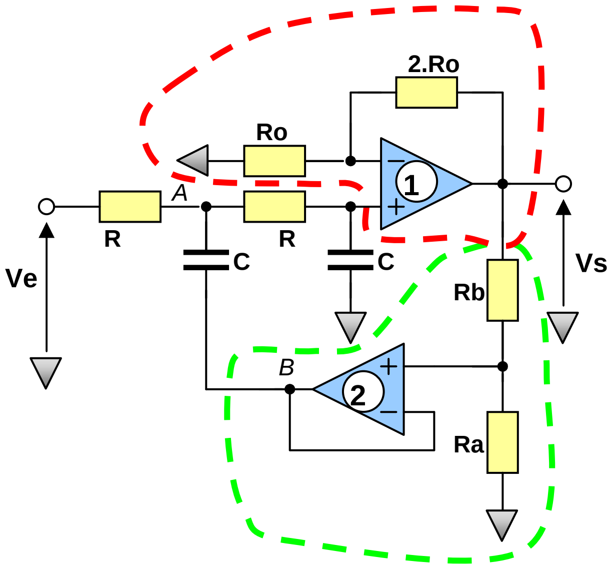


Figure 1

Entre V+ AOP 1 et Vs : Il s'agit d'un simple montage amplificateur non inverseur donc Vs=3.V+

Entre le potentiel VB et Vs il s'agit d'un simple pont diviseur grâce à la présence d'un AOP 2 monté en suiveur :
$VB = \alpha Vs$ avec $\alpha = \frac{Ra}{Ra+Rb}$ (pour simplifier l'écriture dans la suite du calcul)

En utilisant le théorème de Millmann au point A il vient :

$$VA = \frac{\frac{Ve}{R}+\frac{Vs}{3R}+\alpha Vs.jC\omega}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+jC\omega} = \frac{3Ve+Vs(1+3\alpha jRC\omega)}{6+3jRC\omega}$$

Entre VA et V+ AOP 1 on reconnaît un simple montage RC passe bas donc : $\frac{Vs}{3} = VA.\frac{1}{1+jRC\omega}$ donc

$Vs(1+jRC\omega) = 3.VA$

En regroupant les 2 équations précédentes il vient : $Vs(1+jRC\omega)(2+jRC\omega) = 3Ve+Vs(1+3\alpha jRC\omega)$

Soit $\boxed{\frac{Vs}{Ve} = \frac{3}{1+3(1-\alpha)jRC\omega+(jRC\omega)^2}}$ de la forme indiquée avec $\boxed{To = 3}$ $\boxed{\omega o = \frac{1}{RC}}$ et $\boxed{m = \frac{3}{2}(1-\alpha)}$

Q2 : Il s'agit d'un filtre passe bas du 2nd ordre dont le coefficient d'amortissement peut se régler grace au coefficient α.

Q3 : Pour obtenir $m = 1/\sqrt{2}$ il faut que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}(1-\alpha)$ soit $1-\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ comme $\alpha Rb = (1-\alpha)Ra$

cela signifie que $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)Rb = \frac{\sqrt{2}}{3}Ra$ soit $\boxed{Ra = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}-1\right)Rb}$ ce qui correspond à Ra≈1,12Rb

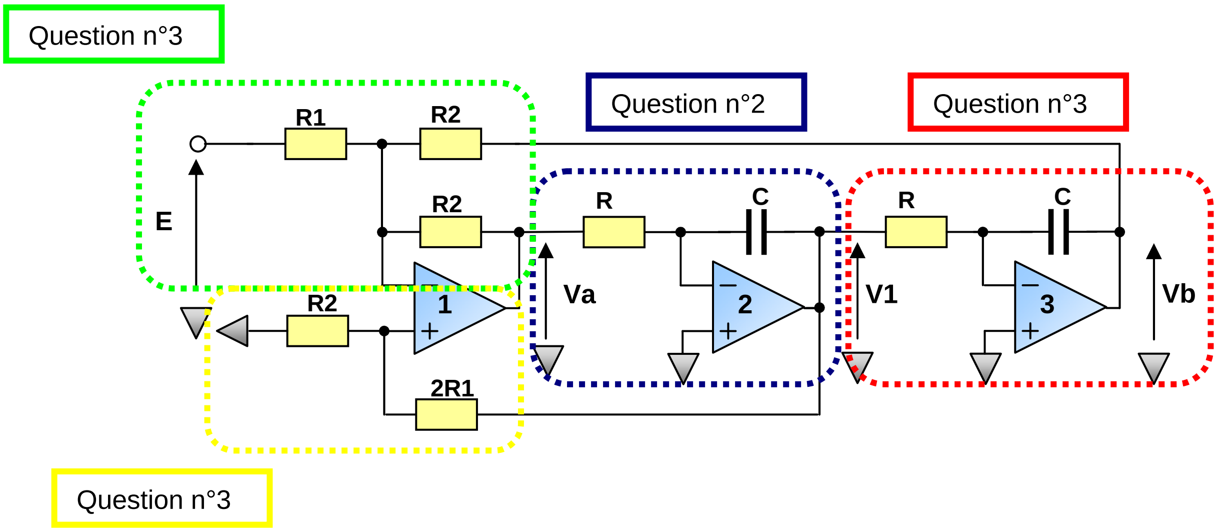
Q4 : Pour $m = 1/\sqrt{2}$ la fréquence de coupure correspond à la fréquence propre donc $\boxed{fc = \frac{1}{2\pi RC}}$

Pour le tracé du diagramme de Bode voir la simulation LTSpice correspondante.

Exercice n°2 : Un testeur de niveau pour la tonalité 440Hz téléphonique

Q1 : On désire vérifier que la tonalité se situe bien dans une bande de +/-15Hz autour de la fréquence de 440Hz. Si l'on choisit donc une bande passante de BP=30Hz (2×15Hz) pour un filtre sélectif centré sur fo=440Hz, le facteur de qualité de ce filtre est tel que Q=fo/BP soit $\boxed{Q=14{,}7}$.
En choisissant un facteur de qualité Q=15 pour le filtre sélectif on satisfait donc bien à l'exigence du cahier des charges.

Afin de mener à bien le calcul de la fonction de transfert du montage proposé on décompose l'étude du schéma en 4 parties élémentaires correspondant aux questions 2 à 5 du sujet.



Q2 : On reconnaît un montage intégrateur pur donc : $V1(j\omega)=Va(j\omega).\dfrac{-1}{jRC\omega}$

Q3 : Il s'agit ici du même montage donc $Vb(j\omega)=V1(j\omega).\dfrac{-1}{jRC\omega}$

Q4 : Il est possible d'utiliser le théorème de Millmann ce qui permet d'écrire : $V-=\dfrac{\dfrac{E}{R1}+\dfrac{Va}{R2}+\dfrac{Vb}{R2}}{\dfrac{1}{R1}+\dfrac{2}{R2}}$

soit $V-=\dfrac{E.R2+Va.R1+Vb.R1}{2R1+R2}$

Q5 : Il s'agit d'un simple pont diviseur de tension, donc : $V+=\dfrac{R2}{R2+2R1}\cdot V1$

Q6 : Comme l'AOP n°1 fonctionne en régime linéaire $V+=V-$ ce qui permet d'écrire que :

$$\frac{E.R2+Va.R1+Vb.R1}{2R1+R2}=\frac{R2}{R2+2R1}\cdot V1$$

que l'on peut simplifier sous la forme : $E.R2+Va.R1+Vb.R1=R2.V1$

Comme l'on souhaite calculer la fonction de transfert $T(j\omega)=\dfrac{V1(j\omega)}{E(j\omega)}$ il suffit de remplacer dans l'expression précédente les termes Va et Vb en fonction de V1. Il vient donc :

$E.R2-jRC\omega.V1.R1-\dfrac{V1}{jRC\omega}.R1=R2.V1$ soit $E.R2.(jRC\omega)=(jRC\omega)^2.V1.R1+V1.R1+R2.(jRC\omega)V1$

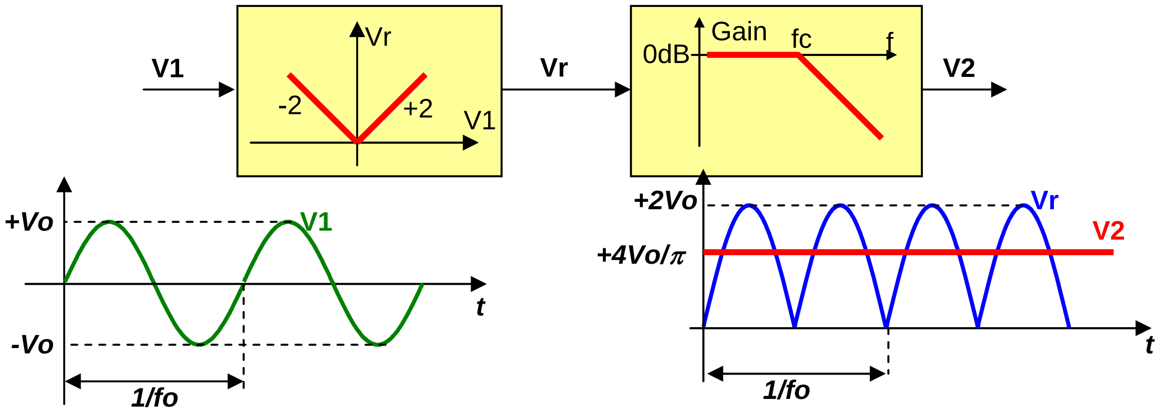
donc $\boxed{T(j\omega)=\dfrac{V1(j\omega)}{E(j\omega)}=\dfrac{\dfrac{R2}{R1}jRC\omega}{1+\dfrac{R2}{R1}jRC\omega+(jRC\omega)^2}}$ de la forme $T(j\omega)=\dfrac{V1(j\omega)}{E(j\omega)}=\dfrac{\dfrac{j\omega}{Q.\omega o}}{1+\dfrac{j\omega}{Q\omega o}+\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$

avec $Q=\dfrac{R1}{R2}$ et $\omega o=\dfrac{1}{RC}$ comme indiqué dans le sujet.

Q7 : On fixe R2=10kΩ et C=33nF. On en déduit donc R1= Q.R2 soit $\boxed{\text{R1=150k}\Omega}$

et $R = \dfrac{1}{2\pi fo.C}$ soit $\boxed{\text{R=10,96k}\Omega}$ (11kΩ en série E24)

Q8 : Afin d'obtenir un signal continu sur la sortie V2 il faut choisir une fréquence de coupure fc bien plus petite que 2×fo. En régime permanent on peut illustrer le fonctionnement du dispositif :



Q9 : V2 correspond à la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal redressé double alternance soit : $\boxed{V2 = 2.Vo.\frac{2}{\pi}}$

Q10 : On peut facilement établir que εcp1=V2-Vt1 et εcp2=Vt2-V2
ce qui permet de compléter le tableau de fonctionnement suivant :

		Vt1		Vt2		V2
εCP1	*<0*		*>0*		*>0*	
Interrupteur CP1	*fermé*		*ouvert*		*ouvert*	
εCP2	*>0*		*>0*		*<0*	
Interrupteur CP2	*ouvert*		*ouvert*		*fermé*	
Etat LED	*éteinte*		*éclairée*		*éteinte*	

La LED ne peut s'éclairer que si les 2 interrupteurs sont ouvert en même temps.

Q11 : Une loi des maille permet de déterminer la valeur de la résistance Rc.

On en déduit que $Rc = \dfrac{Vcc - Vd}{Id}$ soit $\boxed{\text{Rc=290}\Omega}$ (300Ω en série E24)

Q12 : L'amplitude du signal d'entrée peut varier entre +4dBm et +3dBm ce qui correspond à

$\boxed{\text{Êmin= 1,54V}}$ et $\boxed{\text{Êmax = 1,73V}}$ En effet : $PdBm = 10.\log\left(\dfrac{\hat{E}^2}{2.600\cdot 1mW}\right)$ soit $\hat{E} = \sqrt{1.2\cdot 10^{\frac{PdBm}{10}}}$

A la sortie du filtre la tension max sera donc V1max=1,73V lorsque l'on se trouve exactement à la fréquence fo et V1min=Êmin×0,707 dans le cas ou l'on se trouve en limite de bande passante soit V1min=1,09V

On obtient donc les 2 niveaux $\boxed{\text{Vt1= V1min×(4/π) = 1,39V}}$ et $\boxed{\text{Vt2= V1max×(4/π) = 2,2V}}$

Exercice n°3 : Analyse d'un extrait de documentation constructeur

Q1 / Q2 : On reconnaît une structure de Sallen & Key de type passe haut.

Q3 : Si on appelle A le point commun aux 2 condensateurs et à la résistance R1, en utilisant le théorème de Millman on peut écrire que $VA = \dfrac{\dfrac{Vs}{R1} + Ve.jC\omega + Vs.jC\omega}{\dfrac{1}{R1} + 2jC\omega}$ soit $VA = \dfrac{Vs(1 + jR1C\omega) + Ve.jR1C\omega}{1 + 2jR1C\omega}$

Entre le potentiel VA et l'entrée + de l'AOP on reconnaît un simple montage passe haut RC donc :

$Vs = VA.\dfrac{jR2C\omega}{1 + jR2C\omega}$ soit $\dfrac{Vs(1 + jR2C\omega)}{jR2C\omega} = VA$

En regroupant les 2 équations précédentes il vient :

$$\frac{Vs(1 + jR2C\omega)}{jR2C\omega} = \frac{Vs(1 + jR1C\omega) + Ve.jR1C\omega}{1 + 2jR1C\omega}$$

$$Vs(1 + jR2C\omega)(1 + 2jR1C\omega) = Vs(jR2C\omega)(1 + jR1C\omega) + Ve.R1R2C^2(j\omega)^2$$

$$Vs(1 + jR2C\omega)(1 + 2jR1C\omega) - Vs(jR2C\omega)(1 + jR1C\omega) = Ve.R1R2C^2(j\omega)^2$$

$$Vs\left(1 + 2jR1C\omega + R1.R2C^2(j\omega)^2\right) = Ve.R1R2C^2(j\omega)^2$$

Soit $\boxed{\dfrac{Vs}{Ve} = \dfrac{R1R2C^2(j\omega)^2}{1 + 2jR1C\omega + R1.R2C^2(j\omega)^2}}$ de la forme $\dfrac{Vs}{Ve} = \dfrac{\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}{1 + 2\left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right) + \left(\dfrac{j\omega}{\omega o}\right)^2}$

avec $\boxed{\omega o = \dfrac{1}{C\sqrt{R1R2}}}$ et $\dfrac{2m}{\omega o} = 2R1C$ soit $\boxed{m = \sqrt{\dfrac{R1}{R2}}}$

Q4 : Il existe une inversion des valeurs entre R1 et R2. Il faut lire R1=39kΩ et R2=82kΩ
Application numérique : $\boxed{m=0,69}$ et $\boxed{fo=5025Hz}$

Q5 : Comme m est proche de 0,7 on peut considérer que fo est quasiment la fréquence de coupure fc. Comme le filtre est du 2nd ordre on obtient donc une atténuation de 40dB à f=500Hz et donc de 80dB à f=50Hz ce qui correspond bien aux valeurs de l'énoncé.