Décomposition en série de Fourier

Théorème

Un signal périodique $v(t)$ de période T_0 peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquence multiple de $f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ et de sa valeur moyenne.

1ère expression de la série de Fourier

On décompose $v(t)$ sous la forme suivante : $\boxed{v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin(n\omega_0 t)}$

avec : $\boxed{V_0 = \overline{v(t)} = \dfrac{1}{T_0}\int_{(T_0)} v(t)dt}$ $\boxed{a_n = \dfrac{2}{T_0}\int_{(T_0)} v(t).\cos(n\omega_0 t)dt}$ $\boxed{b_n = \dfrac{2}{T_0}\int_{(T_0)} v(t).\sin(n\omega_0 t)dt}$

2ième expression de la série de Fourier

En regroupant les termes « a_n » et « b_n », on obtient l'expression suivante :

$\boxed{v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\cos(n\omega_0 t - \varphi_n)}$ avec : $c_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}$ et $\varphi_n = \arctan\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$ $\{+\pi$ si $a_n < 0\}$

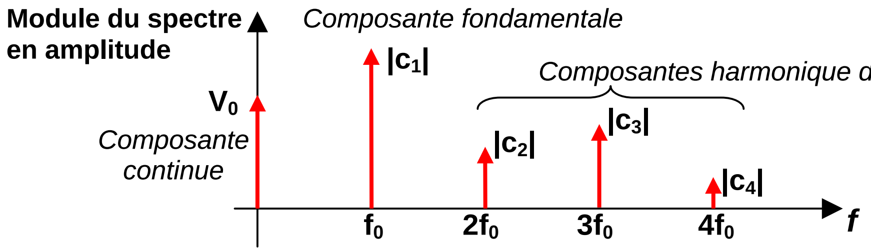
- La composante sinusoïdale à la fréquence f_0 s'appelle le fondamental du signal $v(t)$
- La composante sinusoïdale à la fréquence multiple de f_0, $n.f_0$, s'appelle l'harmonique de rang n du signal $v(t)$.

Quelques propriétés importantes pour le calcul des séries de Fourier :

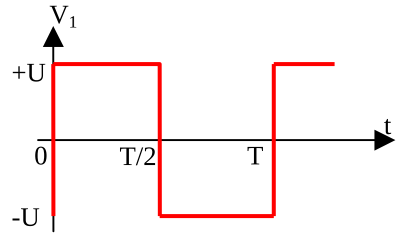
- Si $v(t)$ est pair $\{\ v(t) = v(-t)\ \forall t\ \}$ alors les coefficients b_n sont nuls.
- Si $v(t)$ est impair $\{\ v(t) = -v(-t)\ \forall t\ \}$ alors les coefficients a_n sont nuls.
- Si $v\left(t + \dfrac{T_0}{2}\right) = -v(t)\quad \forall t$ alors $v(t)$ ne contient que des harmoniques impairs.

Représentation graphique : Le spectre d'amplitude

Il s'agit d'un mode de représentation très utilisé en électronique. Cette représentation renseigne sur l'amplitude de chaque composante fréquentielle d'un signal donné comme l'indique la figure suivante :

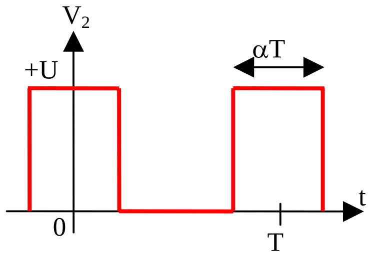


Décomposition en série de Fourier des signaux usuels

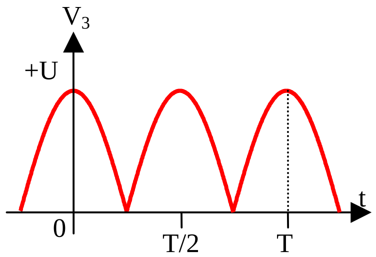


$$V_1(t) = \frac{4.U}{\pi}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\sin\big((2n+1)\omega t\big)$$

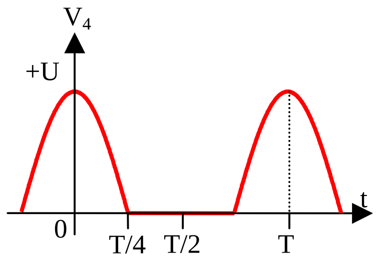
$$V_1(t) = \frac{4.U}{\pi}\cdot\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\cdot\sin(5\omega t) + ...\right]$$



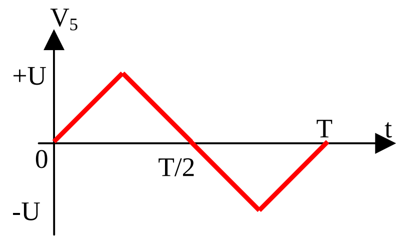
$$V_2(t) = \alpha U + \frac{2.U}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin\big(n\alpha\pi\big)\cos\big(n\omega t\big)$$



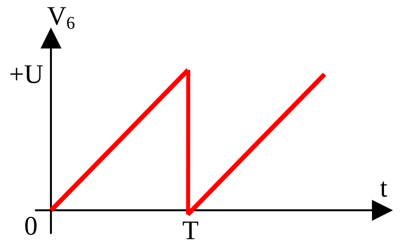
$$V_3(t) = \frac{2U}{\pi} - \frac{4.U}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}\cos\big(2n\omega t\big)$$



$$V_4(t) = \frac{U}{\pi} + \frac{U}{2}\cos(\omega t) + \frac{2.U}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)}\cos\big(2n\omega t\big)$$



$$V_5(t) = \frac{8.U}{\pi^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\big((2n+1)\omega t\big)$$



$$V_6(t) = \frac{U}{2} - \frac{U}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\big(n\omega t\big)$$